Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников
по математике
2017/18 г.
11 кл.
158 349 250 94

ТЕТРАДЬ

для ______________________________

____

учени____________ класса __________

_________________ школы ___________

____

____

1	2	3	4	5
7	7	7	7	7

1. Ответ: да

например ряд

8; 1; 15; 10; 6; 3; 13; 12; 4; 5; 11; 14; 2; 7; 9

удовлетворяет данному условию, т.е.

$8 + 1 = 16 = 4^2$

$1 + 15 = 16 = 4^2$

$15 + 10 = 25 = 5^2$

$10 + 6 = 16 = 4^2$

$6 + 3 = 9 = 3^2$

$3 + 13 = 16 = 4^2$

$13 + 12 = 25 = 5^2$

$12 + 4 = 16 = 4^2$

$4 + 5 = 9 = 3^2$

$5 + 11 = 16 = 4^2$

$11 + 14 = 25 = 5^2$

$14 + 2 = 16 = 4^2$

$2 + 7 = 9 = 3^2$

$7 + 9 = 16 = 4^2$

2. $ax^2 - 2x + 2a^2 - 4 = 0$

$a \in \mathbb{Z}$

$x_{1,2} \in \mathbb{Z}$

по т. Виетта

$\frac{2}{a} = x_1 + x_2$

$2 = (x_1 + x_2)a$

т.к. x_1 и x_2 - целые числа, то

$(x_1 + x_2)$ - целое число

a - целое число, следовательно

$$(x_1 + x_2)a = 2 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1 \\ (x_1 + x_2) = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 2 \\ (x_1 + x_2) = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -1 \\ (x_1 + x_2) = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -2 \\ (x_1 + x_2) = -2 \end{cases} \end{array}\right.$$

1) при $a = 1$ уравнение

$$ax^2 - 2x + 2a^2 - 4 = 0$$

не имеет корней

2) при $a = 2$ уравнение

не имеет целых корней

3) при $a = -1$ уравнение

не имеет корней

4) при $a = -2$ уравнение

$ax^2 - 2x + 2a^2 - 4 = 0$ принимает вид

$$-2x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$\begin{cases} a = -2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array} \right. \end{cases}$$ (по т. Виетта)

~~[illegible]~~ При $a = 0$ уравнение

принимает вид

$$-2x - 4 = 0$$

$$x = -2$$

Ответ: $-2; 0$.

4 $\quad (tg\,17^\circ)^{\sin 17^\circ} + (ctg\,17^\circ)^{\cos 17^\circ}$ ~~...~~

ВНП: $\quad x = (tg\,17^\circ)^{\sin 17^\circ}$

$\quad\quad y = (ctg\,17^\circ)^{\cos 17^\circ}$

~~...~~ Докажем, что

$x + y > 2$

$\frac{x+y}{2} > 1$, т.к. $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, то

$\frac{x+y}{2} > 1$ верно, если верно

$\sqrt{xy} > 1$

$xy > 1$

$(tg\,17^\circ)^{\sin 17^\circ}(ctg\,17^\circ)^{\cos 17^\circ} > 1$

$$\frac{(tg\,17^\circ)^{\sin 17^\circ}}{(tg\,17^\circ)^{\cos 17^\circ}} > 1$$

Докажем: $(tg\,17^\circ)^{\sin 17^\circ} > (tg\,17^\circ)^{\cos 17^\circ}$

$\cos 17^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 17^\circ\right) = \sin 73^\circ$

$\sin 73^\circ > \sin 17^\circ > \sin 0^\circ$

$\cos 17^\circ > \sin 17^\circ > 0$

$\operatorname{tg} 0^\circ < \operatorname{tg} 17^\circ < \operatorname{tg} 45^\circ$

$0 < \operatorname{tg} 17^\circ < 1$

$0 < \operatorname{tg} 17^\circ < 1 \Rightarrow$

$0 < \sin 17^\circ < \cos 17^\circ$

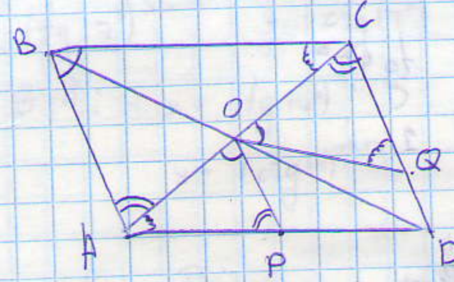
$y = a^x$; т.к. $0 < a < 1$ $(a = \operatorname{tg} 17^\circ)$ и

$(x_1 = \sin 17^\circ$; $x_2 = \cos 17^\circ)$

$x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$

$(\operatorname{tg} 17^\circ)^{\sin 17^\circ} > (\operatorname{tg} 17^\circ)^{\cos 17^\circ}$

Что и требовалось доказать

3. 

Дано: ABCD - параллелограмм
т. O - центр ABCD,
$\angle AOP = \angle COQ = \angle ABC$

Доказать: $\angle ABP = \angle CBQ$

Доказательство:

AOQD :

$\angle A + \angle O + \angle Q + \angle D = 360^\circ$

$\angle A + \angle Q = 360^\circ - \angle O - \angle D$

$\angle ADC = \angle ABC$ (как противол. углы пар-ма)

Пусть $\angle ABC = \angle AOP = \angle COQ = \alpha$

$\angle AOQ = 180^\circ - \angle COQ = 180^\circ - \alpha$

$\angle OAD + \angle OQD = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - \alpha = 180^\circ$

$\angle DQO + \angle OQD = 180^\circ$

√ ?

$\Rightarrow \angle OAD = OQC$

AD ∥ BC и сек. AC :

$\angle OAP = \angle ACB$ (как н/л)

AB ∥ CD и сек AC :

$\angle BAC = \angle ACQ$ (как н/л)

$\triangle ABC$, $\triangle POA$ и $\triangle COQ$:

$\angle AOP = \angle COQ = \angle ABC$

$\angle CAB = \angle APO = \angle OCQ$

Сл-но $\triangle ABC \sim \triangle POA \sim \triangle COQ$ (по признаку подобия)

$AO = OC$ (т.к. т.O - точка пересечения диагоналей пар-ма)

$\triangle ABC \sim \triangle POA \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{OP}{OA}$

$\triangle POA \sim \triangle COQ$, $AO = OC$ $\Rightarrow \frac{OP}{OC} = \frac{AP}{CQ} = \frac{OP}{OA} = \frac{AB}{BC}$

$\triangle ABP$ и $\triangle CBQ$:

1) $\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{CQ}$

2) $\angle BAP = \angle BCQ$ (как противол. углы пар-ма)

Следовательно $\triangle ABP \sim \triangle CBQ$ (по признаку подобия)

$\Rightarrow \angle ABP = \angle CBQ$

~~бы~~ Что и требовалось доказать.

5. Ответ: да

Если эксперт положит на одну чашу весов все 6 данных монет, а на другую чашу — 3 настоящие и 3 фальшивые то

1) Если чаши ~~и~~ равны, то 3 из 6 монет фальшивые

2) Если чаша с неизвестными монетами ~~лег~~ легче, то взвесив эти 6 монет с 1 настоящими и 5 фальшивыми, ~~то~~ эксперт ~~уз~~ узнает, что

а) в случае, если 6 неизвестных монет легче, то кол-во фальшивых > 5, т.е. равно 6.

б) в случае, если 6 неизвестных монет тяжелее то кол-во фальшивых < 5 и > 3, т.е. равно 4

в) в случае, если 6 неизвестных монет весят также, то кол-во фальшивых равно

3) Если при первом взвешивании 6 неизвестных монет тяжелее, то при взвешивании этих 6 монет с 5 настоящими и 1 фальшивой, эксер узнает, что

а) в случае, если 6 неизвестных монет легче, то кол-во фальшивых (<3 и >1), т.е. равно 2

б) в случае, если 6 неизвестных монет весят также, то кол-во фальшивых равно 1

в) в случае, если 6 неизвестных монет весят тяжелее, то кол-во фальшивых <1, т.е. равно 0

x - неизвестные n - настоящие f - фальшивые

1 взвеш. $6x \leftrightarrow 3n3f$

$6x < 3n3f$ → $6x \leftrightarrow 1n5f$

$6x = 3n3f$ → 3 фальшивых

$6x > 3n3f$ → $6x \leftrightarrow 5n1f$

2 взвеш.

$6x < 1n5f$ → 6 фальш.

$6x = 1n5f$ → 5 фальш.

$6x > 1n5f$ → 4 фальш.

$6x < 5n1f$ → 2 фальш.

$6x = 5n1f$ → 1 фальш.

$6x > 5n1f$ → 0 фальш.

Возможность решения наглядно продемонстрирована деревом.