165 - 141 - 997 - 73

9 класс

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	7	7	35

ТЕТРАДЬ

для ______________________________

____

учени__________ класса__________

______________ школы__________

____

____

Чистовик.

Муниципальный этап Всероссийской Олимпиады школьников по математике в 2018 – 2019 году.

№1.

Сумма всех чисел в таблице 45.

Так как Боря вычеркнул 4 числа, то минимальная сумма чисел Бори – это $1+2+3+4=10$. Так как сумма чисел, вычеркнутых Витей в 3 раза больше суммы вычеркнутых Борей, то $В = 3Б$, Б – сумма чисел, вычеркнутых Борей, В – сумма чисел, вычеркнутых Витей. Пусть в конце осталось число a. Тогда

$$В + Б + a = 45.$$

$$3Б + Б + a = 45$$

$$a = 45 - 4Б.$$

$45 \equiv 1 \pmod 4$; $(4Б) \vdots 4$, значит, $a \equiv 1 \pmod 4$. Так как a – это цифра то $\left[\begin{array}{l} a=1. \\ a=5 \\ a=9 \end{array}\right.$

Тогда $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=11 \\ a=1 \end{cases} \\ \begin{cases} b=10 \\ a=5 \end{cases} \\ \begin{cases} b=9 \\ a=9 \end{cases} \end{array}\right.$

Так как минимальная сумма чисел Бори — это 10, то $a \neq 9$.

+

Допустим, $a=1$, тогда минимальная сумма чисел Бори теперь — это $2+3+4+5 = 14$, но $14 > 11$, противоречие, значит, $a \neq 1$.

~~[illegible]~~ Последний вариант — $a=5$.

Тогда Боря вычеркнул числа 1;2;3;4.

Витя вычеркнул числа 6;7;8;9.

Ответ: осталось число 5

№2.

$x^2+(a-b)+(b-c)=0 \quad (1)$ | $D_1=(a-b)^2-4(b-c)$

$x^2+(b-c)x+(c-a)=0 \quad (2)$ | $D_2=(b-c)^2-4(c-a)$

$x^2+(c-a)x+(a-b)=0 \quad (3).$ | $D_3=(c-a)^2-4(a-b)$

уравнение (1) имеет решение тогда и только тогда, когда $D_1 \geq 0$. (2) имеет решение тогда и только ~~то~~тогда, когда $D_2 \geq 0$. (3) имеет решение тогда и только тогда, когда $D_3 \geq 0$.

Допустим, ни одно из уравнений (1), (2), (3) не имеет решений. Тогда:

$$\begin{cases} D_1<0 \\ D_2<0 \\ D_3<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a-b)^2-4(b-c)<0 \\ (b-c)^2-4(c-a)<0 \\ (c-a)^2-4(a-b)<0 \end{cases}$$

сложим все неравенства

$$(a-b)^2-4(b-c)+(b-c)^2-4(c-a)+(c-a)^2-4(a-b)<0$$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2<0$. но при этом $(a-b)^2 \geq 0$, $(b-c)^2 \geq 0$, $(c-a)^2 \geq 0$,

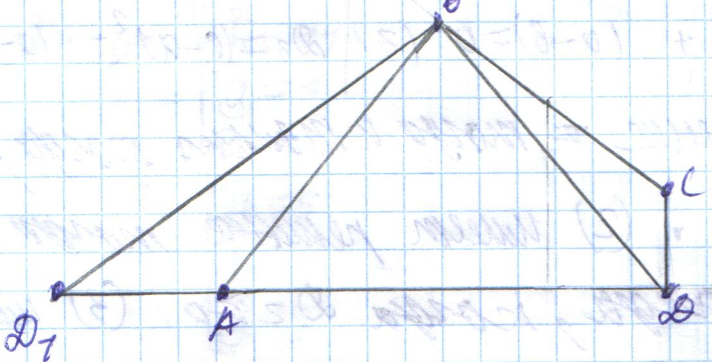
$(a-b)^2+(c-a)^2+(b-c)^2 \geq 0$, противоречие, значит ~~[illegible]~~ ~~ни~~ хотя бы одно из уравнений (1), (2), (3) ~~не могут не иметь решений~~ имеет решение,

ч.т.д.

+

№3.

Дано:
$ABCD$ - четырехугольник.
$\angle ABC = 90^\circ$
$\angle ADC = 90^\circ$
$BD = a$.
$AB = BC$.
Найти:
$S(ABCD)$



Решение:

1) Д.п. продлим AD за точку A на расстояние ~~CD~~ AD_1, равное CD.

2) Пусть $\angle BCD = \alpha$.

~~Д.К.~~ в $ABCD$: $\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB =$
$= 360^\circ$ по свойству суммы углов.

~~$\angle ABC$~~ $90^\circ + 90^\circ + \alpha + \angle BAD = 360^\circ$

$\angle BAD = 180^\circ - \alpha$.

3) $\angle BAD_1 = 180^\circ - \angle BAD$, так как они смежные ~~вертикальные~~.

$\angle BAD_1 = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha = \angle BCD$

4) $\triangle BCD$ и $\triangle BAD_1$.

$BC = BA$ по условию,
$CD = DA_1$ по построению
$\angle BAD_1 = \angle BCD$ по доказанному,

Значит, $\Delta BCD = \Delta BAD_1$ по 2 сторонам и углу между ними. Тогда $BD_1 = BD = a$, $\angle D_1BA = \angle DBC$, $S(BCD) = S(BAD_1)$

5) $\angle D_1BD = \angle D_1BA + \angle ABD = \angle DBC + \angle ABD = \angle ABC = 90^\circ$ (по условию и по доказанному.)

6) $S(ABCD) = S(ABD) + S(BCD) = S(ABD) + S(BAD_1) = S(D_1BD) = \frac{1}{2} D_1B \cdot BD$, так как ΔD_1BD – прямоугольный ($\angle D_1BD = 90^\circ$) и BD, D_1B – катеты.

$S(ABCD) = \frac{1}{2} D_1B \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{1}{2} a^2$

Ответ: $\frac{1}{2} a^2$

№ 4.

~~Д~~ Да, всегда можно.

Г На доске есть числа x и 1. 1) Запишем на доску число, обратное x. ($\frac{1}{x}$) это можно сделать, так как $x > 0$. 2) Запишем на доску сумму x и 1 $(x+1)$.

3) запишем на доску число, обратное $x+1$ $\left(\frac{1}{x+1}\right)$. Это можно сделать, так как $x+1>0$. $(x>0$ и $1>0)$

4) запишем на доску ~~число~~ разность чисел $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x+1}$ $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1-x}{x(x+1)}=\frac{1}{x^2+x}.$$

5) запишем на доску число, обратное $\frac{1}{x^2+x}$ (x^2+x). Это можно сделать, так как $x^2+x>0$ $(x>0$ и $x+1>0)$.

6) запишем на доску ~~число~~, разность x^2+x и x, $(x^2+x-x=x^2)$. Мы получим число x^2.

№5.

Ответ: 11 очков.

Понятно, что если 11 очков достаточно, то и большего количества очков хватит; и если 10 очков не достаточно; то и меньшего количества очков может не хватить.

Пример, когда 10 очков не достаточно:

I \ II	1	2	3	4	5	6	7	8	итог
1	X	2:0	2:0	2:0	1:1	1:1	1:1	1:1	10
2	0:2	X	1:1	1:1	0:2	0:2	0:2	0:2	2
3	0:2	1:1	X	1:1	0:2	0:2	0:2	0:2	2
4	0:2	1:1	1:1	X	0:2	0:2	0:2	0:2	2
5	1:1	2:0	2:0	2:0	X	1:1	1:1	1:1	10
6	1:1	2:0	2:0	2:0	1:1	X	1:1	1:1	10
7	1:1	2:0	2:0	2:0	1:1	1:1	X	1:1	10
8	1:1	2:0	2:0	2:0	1:1	1:1	1:1	X	10

~~если при со~~ запись x : y означает, что I получил x очков, II получил y очков.
Получается 5 игроков с количеством очков 10, и выбрать 4 лучших нельзя.

если игрок набрал меньше 10 очков, то в этой таблице 1 из его побед или ничьих можно заменить поражением, в результате чего количество очков у других участников не уменьшится (у кого-то увеличится), а так как при 10 очках игрок не мог пройти в финал, то и при меньшем количестве очков условие прохождения в финал не будет выполнятся.

Доказательство, что 11 очков достаточно:

Всего игр было $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$, за каждую игру 2 игрока в сумме получают ровно 2 очка, значит всего в сумме 56 очков на всех игроков.

Допустим, что 11 очков не достаточно. Тогда найдется еще хотя бы 4 игрока с количеством очков не менее 11, иначе ~~...~~ участник с 11 очками должен пройти в финале. (Доп. что нет, тогда есть хотя бы ~~0~~ 4 человек с количеством очков ~~не~~ не более 10, и так как 11 > 10, то участник с 11 очками точно будет входить в лучших).

если нашлось? ещё $\overset{хотя бы}{5}$ человек с количеством очков не менее 11, то всего уже очков ~~5·11+11=~~ не меньше 66, ~~а~~ так как у участника не может быть отрицательное количество очков. Так как очков должно быть равно 56, то этот случай невозможен. (66 > 56)

если нашлось ещё $\overset{ровно}{4}$ человека с количеством очков не менее 11, то всего очков уже хотя бы 55 + количество очков у ~~u~~ участников, набравших меньше 11 очк. таких участников 3, и они точно сыграли 3 игры только между собой, значит, $\overset{общее}{}$количество у этих 3 участников — 6 очков. Тогда всего очков уже хотя бы 61. Значит, этот случай также невозможен. (61 > 56)

+

Значит, 11 очков достаточно для прохождения в финал.