Черновик.

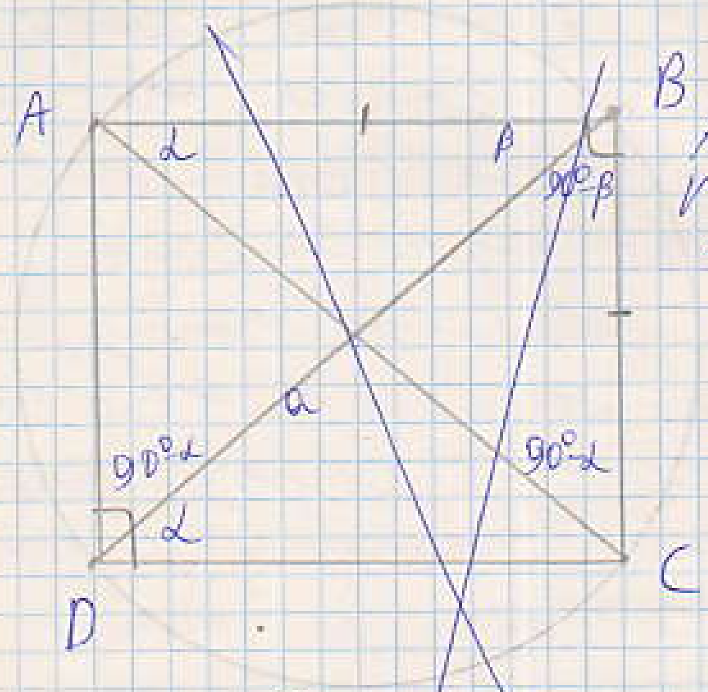
№1.

Ответ: число 5.

Заметим что сумма
четырёх самых маленьких
чисел как раз в 3 раза
меньше суммы четырёх
самых больших чисел.
И если Боря возьмёт
хотя бы одно число
больше первых четырёх
то сумма его чисел уже
не будет в 3 раза меньше
т.к. ~~она~~ сумма станет больше.
Аналогично и если
Витя возьмёт одно
число меньше чем
четыре самых больших
(его сумма станет меньше
и уже не будет в 3

раза больше чисел Бори.
Значит Боря взял числа 1, 2, 3, 4, а Витя взял 6, 7, 8, 9. И на доске осталось число 5.

№3.



Дано:
ABCD – четырехугольник
$\angle B = \angle D = 90^\circ$
$AB = BC$
$BD = a$
Найти:
S_{ABCD}.

Решение:
$\angle B + \angle D = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$
$\Downarrow$
ABCD – вписанный

Пусть $\angle BAC = \alpha$

Тогда $\angle BCA = 90^\circ - \alpha$. ($\triangle ABC$ - прямоугольный)

$\angle BAC = \angle BDC = \alpha$ - вписанные и опирающиеся на одну и ту же дугу

$\angle ADB = \cancel{90^\circ - \alpha}$ $\angle ADC - \angle BDC = 90^\circ - \alpha$,

Пусть $\angle ABD = \beta$, тогда $\angle DBC = \angle ABC - \angle ABD = 90^\circ - \beta$

№4.

Ответ: можно всегда.

Первым шагом мы получим числа $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x+1}$, их мы сможем получить т. к. они обратные числам x и $x+1$.

+

Запишем разность $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x+1}$ их разность равна

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$$

Заменим число обратно получившемуся и получим

$x(x+1) = x^2+x$

Вычтем из этого числа x и получим x^2.

Все действия мы сможем сделать т.к. $x \neq 0$ и $x \neq -1$.

№2.

1) $x^2+(a-b)x+(b-c)=0$

2) $x^2+(b-c)x+(c-a)=0$

3) $x^2+(c-a)x+(a-b)=0$

$D_1=(a-b)^2-4b+4c$

$D_2=(b-c)^2-4c+4a$

$D_3=(c-a)^2-4a+4b$

Нам нужно доказать что при любых a,b,c хотя бы один из дискриминантов ~~не~~ неотрицателен.

Рассмотрим 3 случая:

I Число a - наименьшее, тогда мы возьмём D_3.

$(c-a)^2-4a+4b$ $\quad (c-a)^2 \geq 0$ и

и $4b-4a \geq 0$ т.к. $a \leq b$. $D_3 \geq 0$

Значит 3 уравнение будет иметь решение;

II Число b - наименьшее, тогда мы возьмём D_1.

$(a-b)^2-4b+4c$ $\quad (a-b)^2 \geq 0$ и $4c-4b \geq 0$

значит $D_1 \geq 0$ и уравнение 1 имеет решение.

III Число c - наименьшее, тогда мы возьмём D_2.

$\cancel{x^2+(b-c)x+c}$

$\cancel{a-b)}$ $(b-c)^2-4c+4a$ $\quad (b-c)^2 \geq 0$

и $4a-4c \geq 0$ значит $D_2 \geq 0$

и второе уравнение имеет решение;

№ 9.

Ответ: 11.

Докажем что с 10 баллами он может не пройти. Если он набрал 10 балл то может оказаться ещё 4 человека набравших по 10 балльов и оставшиеся трое наберут по 2 балла. Это может произойти вот так: разделим 8 человека на части по 5 и 3 челов (5 человек набравших по 10 и 3 человека набравших по 2). каждый из 1 группы выиграет каждого из второй группы и сыграет вничью с людьми из своей группы, а люди из второй группы проигрывают каждому из первой группы и играют вничью с людьми из своей группы.

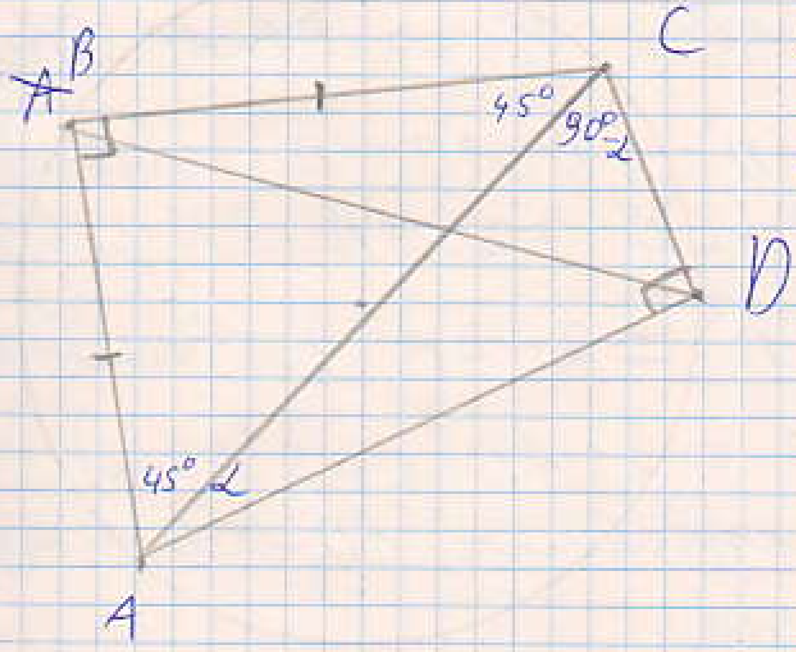
Тогда каждый из первой группы будет иметь 10 баллов, а каждый из второй группы по 2 балла и ~~ту~~ участник с 10 баллами не пройдёт в финал.

(+)

Теперь докажем что с 11 баллами он пройдёт в финал.
За каждую игру в сумме дают 2 очка вне зависимости от исхода.
Игр всего $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$.
Значит всего очков $28 \cdot 2 = 56$

Докажем что не будет 5 людей с ≥11 очками. Если они есть то они набрали больше или равно 55 очков и на оставшихся ~~людей~~ ~~от~~ 3 людей остаётся не более 7 очка, а они в сумме наберут как минимум 6 т.к. Они проведут $\frac{3\cdot 2}{2}=3$ игры между собой и в ходе этих игр им дадут 6 очков. Значит не найдётся 5 человек с 11 очками, и участник гарантированно пройдёт с 11 очками, а с 10 уже не обязательно сможет пройти.

№3.



Дано:
ABCD - четырёхугольник
$\angle B = \angle D = 90°$
$AB = BC$
$BD = a$
Найти:
S_{ABCD}

Решение:
$\angle BAC = \angle BCA = 45°$
~~$\angle CAD$~~ Пусть: $\angle CAD = \alpha$, тогда $\angle ACD = 90° - \alpha$.
ΔBAD по т. косинусов

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos\angle BAD =$ От
$= AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos(45^\circ + \alpha)$

$\triangle BCD$, по т. косинусов,

$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos\angle BCD =$
$= \cancel{BC}\ AB^2 + CD^2 + 2 \cdot \cancel{BC}\ AB \cdot CD (\cos 45^\circ + \alpha)$

$\cancel{AB^2} + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos(45^\circ + \alpha) =$
$= \cancel{AB^2} + CD^2 + 2 \cdot AB \cdot CD \cdot \cos(45^\circ + \alpha)$

$AD^2 - CD^2 = 2 \cdot AB \cdot \cos(45 + \alpha)(AD + CD)$

$AD - CD = 2 \cdot AB \cdot \cos(45^\circ + \alpha)$

подставим $AD - CD$ в теорему косинусов.

$BD^2 = AB^2 + CD^2 + 2 \cdot AB \cdot CD (\cos 45^\circ + \alpha) =$
$= AB^2 + CD^2 + CD \cdot (AD - CD) =$
$= AB^2 + AD \cdot CD = a^2$

$\frac{AB^2}{2} + \frac{AD \cdot CD}{2} = S_{ABC} + S_{CDA} =$
$= S_{ABCD} = \frac{a^2}{2}$

) = Ответ: $S_{ABCD} = \frac{a^2}{2}$

)

=

$45° + \alpha)$

=

$+\alpha)$

$CD)$

$2ay$

$45° + \alpha) =$