165-427-463-98

№1

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	7	7	35

1 * * * * * * * 7

Рассм. ~~первые четыре~~ две последовательные тройки:

$x_1 x_2 x_3 x_4$

15 15

$1+2+3=15$

$2+3+4=15$

$1-4=0$

$1=4$

заметим, что при рассматривании двух последовательных троек, крайние циферки будут равны, тогда рассмотрим всю последовательность таким же образом, и получим, что она разбивается каждые 3 цифры:

a b c d e f g h i

$a=d$, $a+b+c=d+e+f$

$b=e$, $a+b+c=a+b+f$

$c=f$

$a,b,c=d,e,f$ соотв.

Аналогично

$d,e,f=g,h,i$ соотв.

т.е. $a,b,c=d,e,f=g,h,i$ соотв.

получим 1 b c a b c a b 7 ($1=a$, $7=c$)

$a=1$; $c=7$, тогда в первой тройке:

$\underset{a}{1}+b+\underset{c}{7}=15$

$b=7$

Ответ: 7.

7

№2

$px^2+pqx+q=0$ p и q - простые

$p\neq 0$

По т. Виета

$$\begin{cases} x_1x_2=\frac{q}{p} \\ x_1+x_2=-\frac{pq}{p} \end{cases} \qquad x_1;x_2\in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x_1x_2=\frac{q}{p} \\ x_1+x_2=-q \end{cases}$$

т.к. $x_1;x_2\in \mathbb{Z}$, то $\frac{q}{p}\in \mathbb{Z}$, и $q \vdots p$, а q и p - простые, тогда

$$\left[\begin{array}{l} p=1 \text{ — 1 не простое} \\ p=q \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x_1x_2=1 \\ x_1+x_2=-q \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=x_2=-1 \\ x_1=x_2=1 \end{array}\right.$$ т.к. $x_1x_2=1$, а $x_1,x_2\in \mathbb{Z}$

$$\left[\begin{array}{l} -q=-2 \\ -q=2 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} q=2 \\ q=-2 \text{ - не уд. условию} \end{array}\right.$$

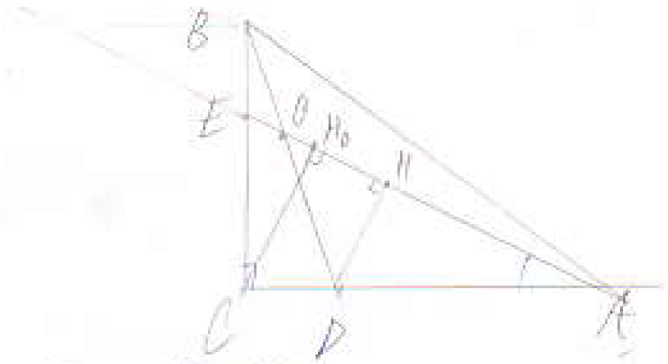
$$\begin{cases} q=2 \\ q=p \end{cases}$$

$p=q=2$

Ответ: $(2;2)$.

165-727-463-98

№3



Решение.

1) Пусть, $BC=a=AD$
$BE=b=CD$

2) Для $\triangle CBD$ и EA по т. Менелая:

$$\frac{CE}{EB}\cdot\frac{BO}{OD}\cdot\frac{DA}{AC}=1$$

$$\frac{a-b}{b}\cdot\frac{BO}{OD}\cdot\frac{a}{a+b}=1$$

$$\frac{BO}{OD}\cdot\frac{a(a-b)}{b(a+b)}=1$$

$$\frac{BO}{OD}=\frac{b(a+b)}{a(a-b)}$$

$$BO=OD\cdot\frac{b(a+b)}{a(a-b)}$$

3) По т. Пиф.:

$$BD^2=BC^2+CD^2=a^2+b^2$$

$$BD=\sqrt{a^2+b^2}$$

4) $BD=BO+OD=\sqrt{a^2+b^2}$

$$OD\left(\frac{b(a+b)+a(a-b)}{a(a-b)}\right)=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$OD\cdot\left(\frac{ab+b^2+a^2-ab}{a(a-b)}\right)=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$OD\cdot\frac{a^2+b^2}{a(a-b)}=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$OD=\frac{a(a-b)\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}=\frac{a(a-b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

5) Найдем высоту CH_0 в $\triangle ACE$:

(По т. Пиф.: $AE=\sqrt{(a-b)^2+(a+b)^2}$)

$$S_{ACE}=\frac{(a-b)(a+b)}{2}=\frac{1}{2}CH_0\sqrt{(a-b)^2+(a+b)^2}$$

$$a^2-b^2=CH_0\sqrt{2(a^2+b^2)}$$

$$CH_0=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{2}}$$

6) Из подобия $\triangle ADH$ и $\triangle ACH_0$ (по двум углам); DH – ~~высота в $\triangle ADO$~~ перп-р к пр. AE и BD

$$\frac{AD}{AC}=\frac{DH}{CH_0};\ \frac{a}{a+b}=\frac{DH}{\frac{a^2-b^2}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}};\ DH=\frac{a(a^2-b^2)}{\sqrt{2}\cdot(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a(a-b)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}}$$

7) В $\triangle ODH$; $\angle H=90^0$

$$\sin\angle DOH=\frac{DH}{OD}=\frac{\frac{a(a-b)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}}}{\frac{a(a-b)}{\sqrt{a^2+b^2}}}=\frac{a(a-b)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a(a-b)}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};\ \angle DOH=45^0$$

Ответ: 45^0.

№4

Пусть он приобрел m обычных игрушек и n крупн. Тогда за год он заработал $16 \cdot m + 21 \cdot n = 269$.

$269 \underset{16}{\equiv} 13$;

$16m + 21n \underset{16}{\equiv} 13$, т. к. $16m \underset{16}{\equiv} 0$, то $21n \underset{16}{\equiv} 13$; $21 \underset{16}{\equiv} 5$; $5n \underset{16}{\equiv} 13$

$n = 9$ $\rightarrow$ (при $n = 9$, $m = 5$: $16 \cdot 5 + 9 \cdot 21 = 80 + 189 = 269$ верно)

Ответ: 9.

переберем:

$n = 1$; $5 \underset{16}{\equiv} 13$ – неверно

$n = 2$; $10 \underset{16}{\equiv} 13$ – неверно

$n = 3$; $15 \underset{16}{\equiv} 13$ – неверно

$n = 4$; $20 \underset{16}{\equiv} 13$ – неверно

$n = 5$; $25 \underset{16}{\equiv} 13$; $9 \underset{16}{\equiv} 13$ – неверно

$n = 6$; $30 \underset{16}{\equiv} 13$; $14 \underset{16}{\equiv} 13$ – неверно

$n = 7$; $35 \underset{16}{\equiv} 13$; $3 \underset{16}{\equiv} 13$ – неверно

$n = 8$; $40 \underset{16}{\equiv} 13$; $8 \underset{16}{\equiv} 13$ – неверно

$n = 9$; $45 \underset{16}{\equiv} 13$; $13 \underset{16}{\equiv} 13$ – верно

$n = 10$; $50 \underset{16}{\equiv} 13$; $2 \underset{16}{\equiv} 13$ – неверно

$n = 11$; $55 \underset{16}{\equiv} 13$; $7 \underset{16}{\equiv} 13$ – неверно

$n = 12$; $60 \underset{16}{\equiv} 13$; $12 \underset{16}{\equiv} 13$ – неверно

$n = 13$; $65 \underset{16}{\equiv} 13$; $1 \underset{16}{\equiv} 13$ – неверно

при $n > 13$; $21n > 269$, n не удов. условию

№5 165-727-463-98

Пусть команда это вершина графа, а игра - ребро, тогда то, что каждая команда сыграла с каждой, означает, что граф - полный.

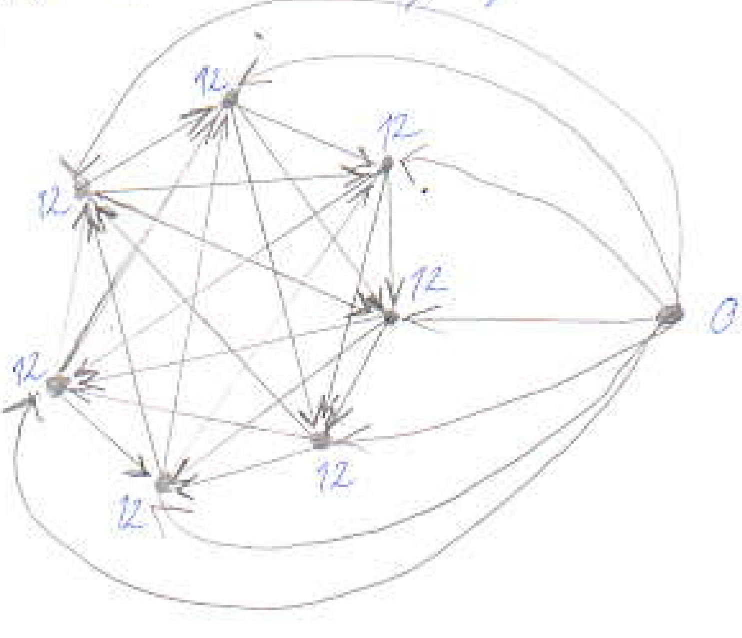
В полном графе на 8 вершинах — $\frac{8\cdot 7}{2}=28$ ребер.

За ничью суммарно всем командам добавляется 2 очка, а за победу 3. ~~[illegible]~~

Тогда максимальная сумма баллов всех команд равна: $28\cdot 3=84$ б, тогда всегда есть команда набравшая менее 11 очков, иначе $S_{общ} \geq 11\cdot 8=88б>84б$, что ~~неверно~~ больше максимальной суммы, что неверно. Максимальное кол-во очков для одной команды: $7\cdot 3=21$, тогда половина: 10,5 очков, т.е успешной считается та команда, которая набрала не менее 11 очков. Итак, успешных команд не более 7, т.к. всегда есть набравшая менее 11б.

Пример на 7:

стрелка — какой команде досталась победа.



Ответ: 7.

+