Чистовик.

№1

1. Обозначим числа, заменённые в последовательности символом "*", буквами от a_1 до a_7 и получим:

$1, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, 7$ (требуется найти a_1)

2. Мы знаем, что сумма любых трёх соседних членов послед-ти равна 15, т.е.

$1+\boxed{a_1+a_2} = \boxed{a_1+a_2}+a_3 \Rightarrow 1=a_3$ (т.е. цифра "1" повторяется через 2 члена)

$a_5+\boxed{a_6+a_7} = \boxed{a_6+a_7}+7 \Rightarrow a_5=7$ (т.е. цифра "7" повторяется через 2 члена)

$a_3+a_4+a_5=15$ и $a_3=1$, $a_5=7$ $\Rightarrow a_4 = 15-7-1=7$

~~$a_3+a_4+a_5=15$ и $a_5=7$, $a_4=7$ $\Rightarrow a_3$~~

получаем: $1, a_1, a_2, 1, 7, 7, a_6, a_7, 7$
(7) (7) (1) (7)

$a_6=15-7-7=1$ $\quad a_2=15-7-1=7$

$a_7=15-7-1=7$ $\quad a_1=15-7-1=7$

1, 7, 7, 1, 7, 7, 1, 7, 7

$a_1=7$

$\boxed{\text{Ответ: 7.}}$

(если бы последовательность имела др. длину, например крайне большое число "*", невозможное для прочтения каждого члена, то (по пункту 1.) можно было бы, что единицы будут повторяться через 2 члена, и семёрки тоже, исходя из этого можно найти более рациональное решение задачи)

№2

$px^2+pqx+q=0 \;|:p$ (p и q - простые), зн. $p\neq 0$ и $q\neq 0$

$x^2+qx+\frac{q}{p}=0$

По т. Виета $\begin{cases} x_1+x_2=-q \\ x_1\cdot x_2=\frac{q}{p} \end{cases}$

если $|p|\neq|q|$, то т.к. они простые, то $\frac{q}{p}$ - несократимая дробь (не является целым числом), равная произведению целых чисел, т.е. целое число равно нецелому, что невозможно.

зн. $p=q$ либо $p=-q$

$\begin{cases} x_1+x_2=-q \\ \left[\begin{array}{l} x_1\cdot x_2=-1 \\ x_1\cdot x_2=1 \end{array}\right. \end{cases}$

т.к. уравнение имеет целые корни, то произв. x_1x_2 будет равно 1 тогда и только тогда, когда $\left[\begin{array}{l} x_1=x_2=1 \\ x_1=x_2=-1 \end{array}\right.$

зн. $\left[\begin{array}{l} -q=2 \\ -q=-2 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} q=-2 \\ q=2 \end{array}\right.$ а т.к. $p=q$, то $\left[\begin{array}{l} p=q=2 \\ p=q=-2 \end{array}\right.$ (2 и -2 - простые)

~~Ответ: пары p=q (-2, 2) (-2; -2).~~

$p=q=2$
$p=q=-2$ и произведение x_1x_2 будет равно (-1) тогда и только тогда, когда $\begin{cases} |x_1|=|x_2|=1 \\ x_1=-x_2 \end{cases}$

т.е. $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=1 \end{cases} \end{array}\right.$ зн. $-q=0$ не явл. простым числом!

Отве...
(е...
положи...
отве...

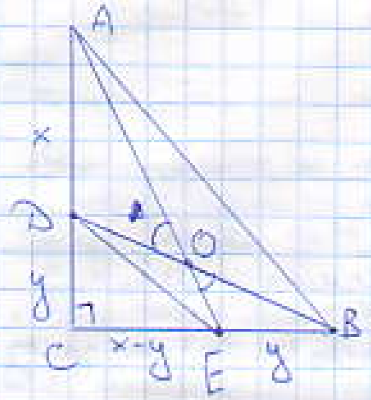
№3

зн. С...
По т. ...
AE = ...
По т. ...
BD = ...
Из...
зн. ...
S (Δ...
$\frac{1}{2}(x+y$...
x^2+x...
x^2+y^2...

Ответ: $p=q=2$ и $p=q=-2$

(Если в задаче числа, противоположные по знаку положительным простым, не считаются простыми, то ответ: $p=q=2$)

№3



Дано: $D \in AC$ и $AD=BC$

$E \in BC$ и $BE=CD$

ΔABC – прямоуг. с $\angle C=90°$

Найти: $\angle(BD;AE)=\varphi$

Решение: пусть $BC=x$, тогда $AD=x$, и пусть $CD=y$, тогда $BE=y$

зн. $CE=x-y$

По т. Пиф. для ΔACE ($\angle C=90°$): $(x-y)^2+(x+y)^2=AE^2$

$AE=\sqrt{2x^2+2y^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}$

По т. Пиф. для ΔBCD ($\angle C=90°$): $x^2+(x-y+y)^2=BD^2$

$BD=\sqrt{x^2+y^2}$

Пусть $BD \cap AE = O$ ~~$\angle ABD=\alpha$, тогда $\varphi=\alpha$, $\varphi=180°-\alpha$~~

зн. φ – угол между BD и AE, они явл. диаг. $EDAB$ и перес. в т. O, $0° < \varphi \leq 90°$ ~~$0 < \varphi < 90°$ как угол между прямыми~~

$S(\Delta ABC)=S(\Delta CDE)+S(ABED)$

$\frac{1}{2}(x+y)(x)=\frac{1}{2}(y)(x-y)+\frac{1}{2}BD\cdot AE\cdot\sin\varphi \quad \Big| \cdot\frac{1}{2}$

$x^2+xy=xy-y^2+\sqrt{2}\cdot(\sqrt{x^2+y^2})^2\cdot\sin\varphi$

$x^2+y^2=\sqrt{2}\cdot(x^2+y^2)\cdot\sin\varphi \quad \Big| :(x^2+y)\neq0$, т.к. сумма положит. величин ($x>0$ и $y>0$ как расстояния)

$\sin\varphi \cdot \sqrt{2} = 1$

$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\varphi \in$ I четв. коорд. окр-ти как угол между прямыми

зн. $\varphi = 45^\circ$

Ответ: 45°

№4

Пусть предприниматель купил x обычных акций и y привилегированных, тогда так как доход от обычной за год 16, а от привилег. 21, а общий доход за год 269, то

$16x + 21y = 269$, причём x и y - целые

если $x=0$, то $y = \frac{269}{21} \notin Z$

если $y=0$, то $x = \frac{269}{16} \notin Z$

Зн. предприниматель купил хотя бы по 1 акции каждого вида.

причём 269 - нечётное, а независимо от x $16x$ - чётное, зн. $21y$ - нечётное, т.е. y - нечётное число

$21 = 3 \cdot 7$ и $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, т.е. 16 и 21 взаимнопросты, т.е.

НОК $(16; 21) = 16 \cdot 21 = 336 > 269$, т.е. уравнение

$16x + 21y = 269$ будет иметь ~~одно решение~~ не более одного решения (т.е. нет числа $336 = 16 \cdot 21 = 21 \cdot 16$, кот. можно распределить как для слагаемого $16x$, так и для $21y$, ведь $269 < 336$)

$\begin{cases} x=5 \\ y=9 \end{cases}$

и

Отве

№5

Мене

при поб

а при

Всего

т.е.

равно

Для

Возмо

зн.,

не ме

т.о.,

не бо

Покаж

номи

$\begin{cases} x=5 \\ y=9 \end{cases}$ - решение, т.к. $16\cdot5+21\cdot9=80+189=269$

и это решение единственно по доказанному.

Ответ: предприниматель купил 9 привилегированных акций.

№5

Максимальное кол-во очков за матч равно 3 (т.к. при победе одной из команд разыгрывается $3+0=3$ очков, а при ничьей $1+1=2<3$ очков)

Всего было проведено $\frac{(1+7)7}{2}=28$ матчей

т.е. максимально возможное разыгрываемое кол-во очков равно $28\cdot3=84$

Для каждой команды максимальное кол-во очков, которое только возможно заработать, равно $7\cdot3=21$ (7 игр и max за игру 3 очка)

Зн., чтобы стать успешной, команда должна заработать не менее 11 очков ($\frac{21}{2}=10,5$, а кол-во очков целое, а $10<10,5$)

Т.о., $84=7\cdot11+\underbrace{7}_{<11}$, т.е. успешными могут стать не более 7 команд.

Покажем на примере, что 7 команд ~~бы~~ могли быть успешными.

Построим таблицу по следующим правилам: ~~[illegible]~~ в каждой строке соотв. номер команды, а пересечения её со столбцом ~~[illegible]~~ этой или иной команды показывают, выиграла она, или проиграла (✓ - победа, × - проигрыш)

(т.е. 1-ая команда победила 2,3,4 и 5, но проиграла 6,7 и 8, 2-ая проиграла 1-ой, победила 3,4,5, и 6 и т.д.)

(в колонке справа подведён итог очков для каждой команды)

	1	2	3	4	5	6	7	8	итог очков:
1		✓	✓	✓	✓	×	×	×	$3\cdot4=12>11$
2	×		✓	✓	✓	✓	×	×	$12>11$
3	×	×		✓	✓	✓	✓	×	$12>11$
4	×	×	×		✓	✓	✓	✓	$12>11$
5	×	×	×	×		×	×	×	$0<11$
6	✓	×	×	×	✓		✓	✓	$12>11$
7	✓	✓	×	×	✓	×		✓	$12>11$
8	✓	✓	✓	×	✓	×	×		$12>11$

Т.о., 7 команд набрали больше $11>\frac{21}{2}$ очков, т.е. оказались успешными. По доказанному более 7 команд быть успешными не могут, т.е. 7 - наибольшее.

Ответ: 7.