Чистовик

№1

$$2^2+4^2+6^2+\ldots+2018^2-1^2-3^2-5^2-\ldots-2017^2 =$$

$$(n+1)^2-n^2=(n+1-n)(n+1+n)=2n+1$$

$$= (2^2-1^2)+(4^2-3^2)+(6^2-5^2)+\ldots+(2018^2-2017^2)$$

~~Тн~~ Лемма: $(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+((n+1)^2-n^2)=$

$=$

База $n=1$ $(2^2-1^2)=$

$$2^2+4^2+6^2+\ldots+2018^2-1^2-3^2-5^2-\ldots-2017^2=$$

$$=(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+\ldots+\cancel{2013}\,(2018^2-2017^2)=$$

• 1. $((2n)^2-(2n-1)^2)=(2n-2n+1)(2n+2n-1)=4n-1$

• 2. $(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+\ldots+((2k)^2-(2k-1)^2)=$

$= 2k^2+k$

База $k=1$ $2^2-1^2=3$ – верно

Шаг

Допустим, утверждение верно при $k=p$, т.е.

$$(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+\ldots+((2p)^2-(2p-1)^2)=2p^2+p$$

Докажем, что оно верно и при $k=p+1$, т.е.

$$(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+\ldots+((2p+1)^2-(2p)^2)=2(p+1)^2+p+1=$$
$$=2p^2+5p+3$$

$$(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+\ldots+((2p+1)^2-(2p)^2)=$$

$$=2p^2+p+4(p+1)-1=2p^2+5p+3$$

утверждение верно при $k=1$, и из его

истинности при $k=p$ следует истинность при $k=p+1$ значит, это верно при $k\in N$

$2^2+4^2+\ldots+2018^2-1^2-3^2-2017^2=$

$=2\cdot 1009^2+1009=1009(2018+1)=1009\cdot 2019=$

$=\cancel{2199171}\ 2037171$

Ответ ~~2199171~~ 2037171 (+)

$$\begin{array}{r} \times\ 2019 \\ 1009 \\ \hline 18171 \\ 2019\ \ \ \ \\ \hline 2037171 \end{array}$$

№2
$$\begin{cases} x(1+\sqrt{y})=2 \\ y(1+\sqrt{z})=2 \\ z(1+\sqrt{x})=2 \end{cases}$$

~~Допустим,~~ ОДЗ $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ z>0 \end{cases}$ (если $x=0$, то $x(1+\sqrt{y})=2$ не имеет смысла)
аналогично, $z\neq 0, y\neq 0$

Допустим, $x<1$ $\quad 1+\sqrt{y}=\frac{2}{x}>2$

$\sqrt{y}>1$

$y>1$

тогда $1+\sqrt{z}=\frac{2}{y}<2$

$z<1$

$z(1+\sqrt{x})<1\cdot 2=2$

решений нет

Допустим, $x>1$ $\quad 1+\sqrt{y}=\frac{2}{x}<2$

$y<1$

тогда $1+\sqrt{z}=\frac{2}{y}>2$

$z>1$

$z(1+\sqrt{x})>1\cdot 2=2$

решений нет

Значит, x может быть только равен 1

$$\begin{cases} x=1 \\ x(1+\sqrt{y})=2 \\ y(1+\sqrt{z})=2 \\ z(1+\sqrt{x})=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ \sqrt{y}=1 \\ z=1 \\ 1(1+1)=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

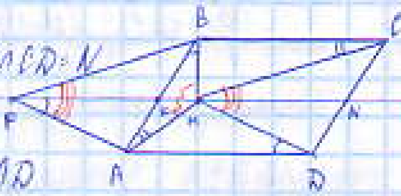
Ответ: $(1,1,1)$ (+)

№3

Дано: $ABCD$ – ~~п~~ параллелограмм
M внутри $ABCD$
$\angle ABM = \angle MDA$

Доказать: $\angle BMA + \angle CMD = 180°$

Доказательство:



1) Д.п. $l \parallel AD$, $M \in l$, $l \cap AB = K$, $l \cap CD = N$
на NM за точку K
$KF = MN$

2) $FM = FK + KM = MN + KM = KN = AD$
(~~по т~~)
($KN = AD$, т.к. $AKND$ – параллелограмм)

3) $FBCM$ $FM = BC$; $FM \parallel BC$
значит, $FBCM$ – параллелограмм,
~~$\angle CMN = \angle$~~ $\angle BCM = \angle BFM$
аналогично в параллелограмме $AFMD$
$\angle AFM = \angle ADM$

4) $\angle AFM = \angle ADM = \angle ABM$
$\angle AFM = \angle ABM$
значит, A, F, B, M лежат на одной окружности

5) $\angle BAM = \angle BFK$ (как опирающиеся на $\smile BM$)
значит, $\angle BAM = \angle BCM$

Можно было короче с этого места дальше.

6) $\angle MCD + \angle MDC = \angle BCD + \angle CDA - \angle BCM - \angle MDA =$
$= 180° - \angle BAM - \angle MBA$

7) $\angle BMA + \angle CMD = 180° - \angle MBA - \angle MAB + 180° - (\angle MCD + \angle MDC) =$
$= 360° - \angle MBA - \angle MAB - 180° + \angle MAB + \angle MBA = 180°$, ч.т.д.

+

№ 4.

1) Если $\underline{p=2}$, то $(p+1)^q = 3^q$

3^q - куб $\Leftrightarrow$ $q \vdots 3 \Leftrightarrow \underline{q=3}$

2) Если $p \neq 2$, то $p \not\vdots 2 \Rightarrow (p+1) \vdots 2$

- При $q \vdots 3$ (т.е. $q=3$) $(p+1)^q$ - куб числа при любом простом p

- При $q = 3k+1$, $k \in \mathbb{N}$

$(p+1)^q = (p+1)^{3k} \cdot (p+1)$ - куб тогда и только тогда, когда $(p+1)$ - полный куб

$p+1 = d^3$, $d \in \mathbb{N}$

но $p+1 \vdots 2 \Rightarrow d^3 \vdots 2 \Rightarrow d \vdots 2$

$p+1 = (2f)^3 = 8f^3$, $f \in \mathbb{N}$

$p = 8f^3 - 1 = (2f-1)(4f^2+2f+1)$

p - простое тогда и только тогда, когда

$$\left[\begin{array}{l} 2f-1=1 \\ 4f^2+2f+1=1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} f=1 \\ f=0 \end{array}\right.$$

$f=1$

$\underline{p=7}$

• При $q = 3k+2$, $k \in \mathbb{N}$

$(p+1)^q = (p+1)^{3k} \cdot (p+1)^2$ – куб тогда и только ~~куб~~ тогда, когда $(p+1)^2$ – полный куб

$$(p+1)^2 = d^3, \ d \in N$$

$$(p+1) \vdots 2 \Rightarrow d^3 \vdots 2 \Rightarrow d \vdots 2$$

$$(p+1)^2 = 8f^3, \quad f \in N$$

$$p^2 + 2p + 1 - 8f^3 = 0$$

$$D_1 = 1 - 1 + 8f^3 = 8f^3$$

$$p = -1 \pm \sqrt{8f^3}$$

т.к. $p > 0$, то $p = \sqrt{8f^3} - 1$

$$p = \sqrt{8f^3} - 1 = \left((\sqrt{2f})^3 - 1\right) = (\sqrt{2f} - 1)(2f + \sqrt{2f} + 1)$$

допустим, $2f$ не полный квадрат числа, тогда $(\sqrt{2f})^3$ – иррациональное число,

какой-то из простых множителей в $2f$ содержится нечётное кол-во раз, значит, в $8f^3$ тоже нечётное кол-во

p – иррациональное число

значит, $2f$ – полный квадрат

$p = (\sqrt{2f} - 1)(2f + \sqrt{2f} + 1)$ – простое число тогда и только тогда, когда

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{2f} - 1 = 1 \\ 2f + \sqrt{2f} + 1 = 1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} f = 2 \\ f \in \varnothing \end{array}\right.$$

$$f = 2$$

$$\underline{p = (\sqrt{4})^3 - 1 = 7}$$

Ответ:

либо p – любое простое, $q = 3$

либо $p = 7$, q – любое простое, кроме 3

(+)

Не самый короткий способ доказательства. Однако, доказательство верное. Ответ верный.