ТЕТРАДЬ

FOOTBALL

для муниципальный
этап по математике

учени______ класса МГ-249

1 2 3 4 5 школы
0 7 7 7 7

[redacted]

28

PROF PRESS

№1

Пусть у нас даны 3 кв. трёхчлена. Приведём их к стандартному виду; (их старш. коэф. не 0, поэтому так можно):

$x^2+b_1x+c_1$; $x^2+b_2x+c_2$; $x^2+b_3x+c_3$; тогда по условию.

$x^2+b_1x+c_1+x^2+b_2x+c_2$ и $x^2+b_3x+c_3$: имеют одинак. корни

Тогда $x^2+\frac{b_1+b_2}{2}x+\frac{c_1+c_2}{2}$ и $x^2+b_3x+c_3$ – имеют одни и те же корни. Тогда сумма корней и произведение корней, этих трехчленов равны. Тогда по т. Виетта

$$\begin{cases} b_1+b_2=2b_3 \\ c_1+c_2=2c_3 \end{cases}$$

Аналогичным образом для ~~первого~~ третьего и второго трёхчл.

получаем, что $\begin{cases} b_2+b_3=2b_1 \\ c_2+c_3=2c_1 \end{cases}$

Объединяя системы, получа[ем]

$$\begin{cases} b_2+b_3=2b_1 \\ c_2+c_3=2c_1 \\ b_1+b_2=2b_3 \\ c_1+c_2=2c_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_3-b_1=2(b_1-b_3) \\ c_3-c_1=2(c_1-c_3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1=b_3 \\ c_1=c_3 \end{cases} \Rightarrow$$ ~~Пр~~ Первый и ~~вт~~ третий трёхчлены равны, противоречие условию.

Ответ: нет.

№2

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$$; z, x, y не равны нулю $\Rightarrow$

$$\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{z} \Rightarrow z=\frac{xy}{x+y}$$

Пусть: $S = x^2+y^2+z^2 \Rightarrow$

$$S = x^2+y^2+\frac{x^2y^2}{(x+y)^2} = \frac{x^4+y^4+2xy^3+2x^3y+2x^2y^2+x^2y^2}{(x+y)^2}$$

Рассмотрим числитель отдельно,

$$x^4+y^4+3x^2y^2+2xy^3+2x^3y =$$

$$y^4\left(\frac{x^4}{y^4}+1+\frac{3x^2}{y^2}+\frac{2x}{y}+\frac{2x^3}{y^3}\right)$$

Пусть: $\frac{x}{y}=t$, тогда числитель равен $y^4(t^4+2t^3+3t^2+2t+1) =$

$= y^4t^2\left(t^2+2t+3+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}\right)$; Пусть: $c = t+\frac{1}{t} \Rightarrow$

$c^2 = t^2+\frac{1}{t^2}+2 \Rightarrow t^2+\frac{1}{t}=c^2-2$

Числитель равен $y^4t^2(c^2-2+2c+3) =$

$= y^4\cdot t^2(c+1)^2 = y^4\cdot t^2\left(t+\frac{1}{t}+1\right)^2 = x^2y^2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1\right)^2$

$$S = \frac{\left(xy\left(\frac{x^2+y^2+xy}{xy}\right)\right)^2}{(x+y)^2} = \frac{(x^2+y^2+xy)^2}{(x+y)^2},$$

Докажем, что $(x^2+y^2+xy) \vdots x$

$(x^2+y^2+xy) = (x+y)^2 - xy$, т.к.

$z = \frac{xy}{x+y}$ и z - нат. число, то

$xy \vdots (x+y)$

$((x+y)^2 - xy) \vdots (x+y)$ т.к. $(x+y)^2 \vdots (x+y)$

и $xy \vdots (x+y)$ $\Rightarrow$ разность

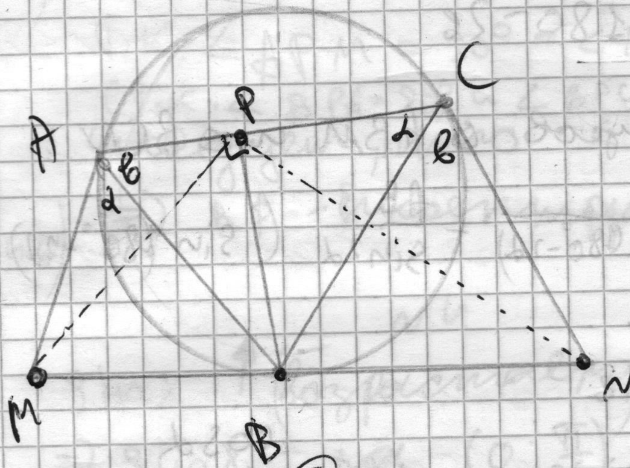
этих чисел делится на

$(x+y)$ ~~и~~ ~~делит~~ $\Rightarrow$ ~~a~~,

$\Rightarrow S = \left(\frac{(x+y)^2 - xy}{(x+y)}\right)^2$ - квадрат целого

числа.

№3



Решение

1) Пусть $\angle BAC = \beta$; $\angle ACB = \alpha$

2) Т.к. CN и AM касательные, то ~~они равн~~ $\angle BCN$ и $\angle MAB$, соотв. равны $\frac{1}{2}\cup BC$ и $\frac{1}{2}\cup AB$ $\Rightarrow$ они равны $\angle BAC$ и $\angle ACB$ $\Rightarrow$ $\angle AMB = \alpha$ | $\angle BCN = \beta$

3) По Т. синусов $\triangle ABC$; $\frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{BC}{\cancel{\cos}\sin\beta}$

4) Т.к. $\triangle APB$ и $\triangle PCB$ – прямоуг., то

$AP = AB\cos\beta$; $CP = BC\cdot\cos\alpha$

$\cos\beta = \frac{AP}{AB}$ $\cos\alpha = \frac{CP}{BC}$

5) $\triangle AMB$ и $\triangle CBN$ – равноб. т.к. $AM = BM$ и $CN = BN$ (касат.)

$\Rightarrow \angle AMB = 180 - 2\alpha = 180 - 2\angle MAB$

$\angle BNC = 180 - 2\beta$

6) По т. синусов в $\triangle ABM$ и $\triangle BCN$:

$$\frac{AM}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{AB}{\sin 2\alpha} \quad (\sin(180^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha)$$

$$\frac{BC}{\sin 2\beta} = \frac{CN}{\sin\beta}$$

7) Т.к. $\cancel{AB}\ \sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \overset{\cos\alpha}{\cancel{\sin}}$

, то $AM = \dfrac{AB}{2\cos\alpha}$ (из п. 4) $\Rightarrow$

$CN = \dfrac{BC}{2\cos\beta}$

$$\Rightarrow AM = \frac{AB \cdot BC}{2\,CP}\,;\quad CN = \frac{BC \cdot AB}{2 \cdot AP} \Bigg| \Rightarrow$$

$$\Bigg| \Rightarrow \frac{AM}{CN} = \frac{\cancel{AB \cdot BC} \cdot \cancel{2} \cdot AP}{\cancel{2} \cdot CP \cdot \cancel{AB \cdot BC}} = \frac{AP}{CP}$$

8) $\triangle MAP \sim \triangle NCP$ по углу и двум пропорциональным сторонам $\left(\dfrac{AM}{CN} = \dfrac{AP}{CP}\,;\ \underbrace{\angle MAP = \angle NCP}_{=\alpha+\beta}\right) \Rightarrow$

9) Т.к.

Т.к

ст.

сле

$\Rightarrow$

$\sin$

$\Rightarrow \sin$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \sin$

$\frac{1}{2}+$

$= 2-$

$2-$

$=$

9) Т.к. $\triangle MAP \sim \triangle NCP$, то $\angle APM = \angle NPC$.
Т.к. $\angle APM = 90^\circ - \angle MPB$ и $\angle NPC = 90^\circ - \angle BPN$
(т.к. $\angle BPA = 90^\circ$ и $\angle BPC = 90^\circ$)
следует, что $\angle MPB = \angle BPN$
$\Rightarrow$ BP - биссектриса $\angle MPN$

№4

$\sin x \uparrow$ (возрастает) на $[0; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin x \uparrow$ на $(0; \frac{\pi}{6}) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ на $(0; \frac{\pi}{6})$ $\sin x < \sin\frac{\pi}{6}$; $\sin x < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin x \ldots \sin^{2019} x < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} \ldots \frac{1}{2^{2019}}$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} \ldots + \frac{1}{2^{2019}} = \frac{\frac{1}{2^{2019}} \cdot \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2^2} - 1} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2021}}}{\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{2 - \frac{1}{2^{2019}}}{3}$$ (т.к. $\frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{2^{2019}}$ - геом прогр.
$b_1 = \frac{1}{2}$; $q = \frac{1}{2^2}$; $S = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$)

$$\frac{2 - \frac{1}{2^{2019}}}{3} < \frac{2}{3}$$ (т.к. $2 - \frac{1}{2^{2019}} < 2$)

$$\Rightarrow \sin x \ldots \sin^{2019} x < \frac{2 - \frac{1}{2^{2019}}}{3} < \frac{2}{3}$$

№5

Пусть a – количество чёрных точек.

b – количество жёлтых точек.

c – количество красных точек,

тогда $2019 = a + b + c$

~~Задам~~ x – количество прямых, выходящих из каждой точки.

Дадим каждой чёрной точке „заряд", равный x; каждой жёлтой точке заряд, равный $-x$, каждой красной точке заряд равный 0. Общий заряду всех точек равен $(a-b)x$. Сделаем так, что бы каждая чёрная точка отдала заряд равный 1, каждой точке с которой она соединена. Каждая жёлтая

Точ
Каж
отд
оп
не

За
то
От
за
ме

З
те
Пу
со
чё
пе
S

точка отдала заряд равный −1, каждой точке, ~~их~~ с которой она соединена. От этого операции общий заряд не изменился.

~~Заметим, что сумма зарядов всех чёрных и жёлтых точек стала равна 0. Действительно, от красных точек никаких зарядов не поступало, а [illegible]~~

Заметим, что сумма зарядов всех чёрных и жёлтых точек равна 0. Пусть S − число прямых соединяющих жёлтые и чёрные точки, тогда жёлтые получили от чёрных заряд S и от красных ничего не получили, зна заряд ~~жё~~ всех жёлтых точек равен S. Чёрные, от жёлтых, получили

заряд $-S$ и от красных 0, значит общий заряд всех чёрных точек равен $-S$.

Значит общий заряд чёрных и жёлтых клеток равен $S-S=0$.

Значит заряд всех красных точек равен $(a-b)x$

Предположим, что нет красной точки, у которой есть и ~~и~~ чёрная точка, и жёлтая. Тогда каждая красная точка соединена либо только с чёрными, либо только с ~~красными~~ жёлтыми.

Пусть d – кол-во красных, соединенных только с чёр.

f – кол-во красных, соед. только с жёлтыми,

тогда $c = d+f$

Тогда общий заряд всех красных равен

$dx - fx = (d-f)x \Rightarrow (a-b) = (d-f)$

$\Rightarrow$ ~~общий~~ $d-f$ – имеет ту же чётность, что и $c = d+f$;

$a-b$ имеет ту же чётность, что и $a+b$ (т.к. $a-b = d-f$, они имеют одну чётность,

значит $(a+b)$ и $(d+f) = c$ имеют одну чётность $\Rightarrow a+b+c$ – чётно,

но $a+b+c = 2019$ (2019 – нечётно)

Противоречие.