Муниципальный этап
по математике
ученицы 11 класса МС-283

ТЕТРАДЬ

для

1	2	3	4	5
7	7	0	7	7

учени класса

школы

28

18 листов

№1. Пусть у нас есть 3 трехчлена, задающие квадратичные функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$.

Т.к. Σ любых двух других трехчленов даёт в сумме квадратный трехчлен с теми же корнями, что и третий, то значит их коэффициенты пропорциональны.

Т.е. если у нас есть два трехчлена, имеющие корни x_1 и x_2, то они принимают вид $a_1(x-x_1)(x-x_2)$ и $a_2(x-x_1)(x-x_2)$ соответственно.

т.е. $\dfrac{a_1(x-x_1)(x-x_2)}{a_2(x-x_1)(x-x_2)} = \dfrac{a_1}{a_2}$.

в нашем случае,

$$\frac{f_1(x)+f_2(x)}{f_3(x)} = k, \text{ где } k \text{ – какое-то число.}$$

$$f_1(x)+f_2(x) = kf_3(x).$$

аналогично, $\dfrac{f_2+f_3(x)}{f_1(x)} = m$, где m – какое-то число.

$$f_2(x)+f_3(x) = mf_1(x).$$

тогда $f_1(x)-f_3(x) = kf_3(x)-mf_1(x)$.

$$f_3(x)(k+1) = f_1(x)(m+1).$$

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)} = \frac{k+1}{m+1}.$$

Т.е. $f_1(x) = \dfrac{k+1}{m+1} f_3(x)$.

~~Отсюда можно сделать вывод, что коэффициенты трехчлена пропорциональны~~

т.е. если x_0 – корень $f_1(x)$,

то $0 = f_1(x_0) = \frac{k+1}{m+1} f_3(x_0)$

$\Rightarrow f_3(x_0) = 0 \Rightarrow$

x_0 – корень и $f_3(x)$.

Значит у $f_1(x)$ и $f_3(x)$ совпадают корни.

Аналогичный вывод можно сделать и для $f_2(x)$ и $f_3(x)$

Значит, у всех квадратных трехчленов совпадают корни.

Пример:

$f_1(x) = x^2 + x - 2$ у каждого

$f_2(x) = 2x^2 + 2x - 4$ корни $1; -2$.

$f_3(x) = 3x^2 + 3x - 6$.

$f_1(x) + f_2(x) = 3x^2 + 3x - 6 = f_3(x)$

$f_1(x) + f_3(x) = 4x^2 + 4x - 8 = 2f_2(x)$

$f_2(x) + f_3(x) = 5x^2 + 5x - 10 = 5f_1(x)$

по выше указанным рассуждениям у ~~них~~ Σ и у другого совпадают корни.

№4.

$\sin x + \sin^3 x + \ldots + \sin^{2019} x$ — геом. прогрессия

$$S = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

всего членов: $n = 1010$.

$q = \sin^2 x$.

$b_1 = \sin x$

при $0 < x < \frac{\pi}{6}$: $q \neq 1$.

$$S = \frac{\sin x\,(q^{1010} - 1)}{q - 1} = \frac{\sin x\,(\sin^{2020} x - 1)}{\sin^2 x - 1} =$$

$$= \frac{\sin x\,(1 - \sin^{2020} x)}{\cos^2 x} \; \textcircled{<}$$

при $x \in (0; \frac{\pi}{6})$: $\sin x \in (0; \frac{1}{2})$.

т.е. $\sin x < \frac{1}{2}$.

$\cos^2 x \in \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2; 1\right)$

$\cos^2 x > \frac{3}{4}$. $\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} < \frac{3}{4}$.

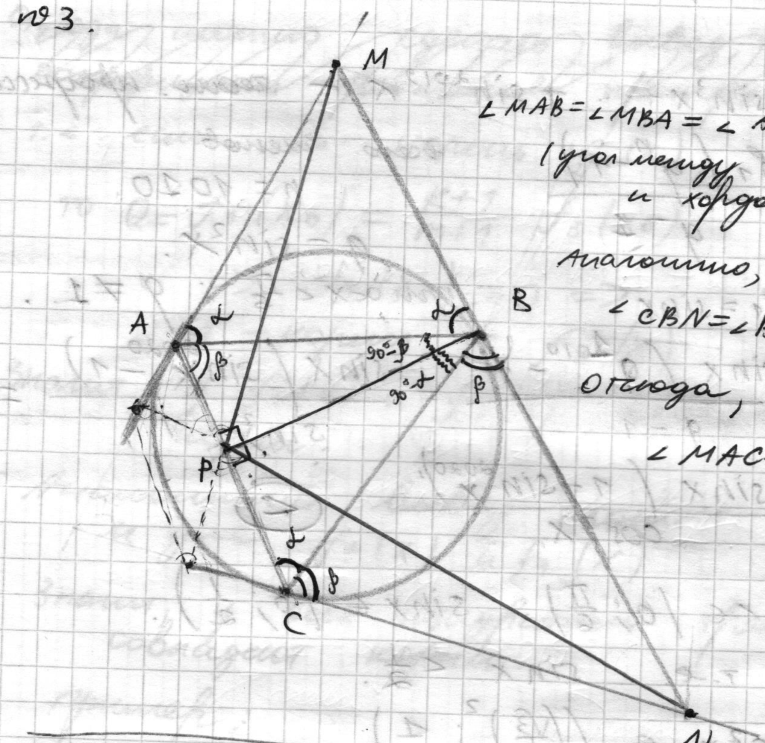
$$\textcircled{<} \; \frac{\frac{1}{2}(1 - \sin^{2020} x)}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}(1 - \sin^{2020} x) \leq \frac{2}{3}.$$

$\sin^{2020} x \geq 0$ (т.к. чет. степ.)

$1 - \sin^{2020} x \leq 1$.

$\Rightarrow \quad S < \frac{2}{3}$, ч.т.д.

№3.



$\angle MAB = \angle MBA = \angle ACB$

(угол между кас-ной и хордой)

Аналогично,

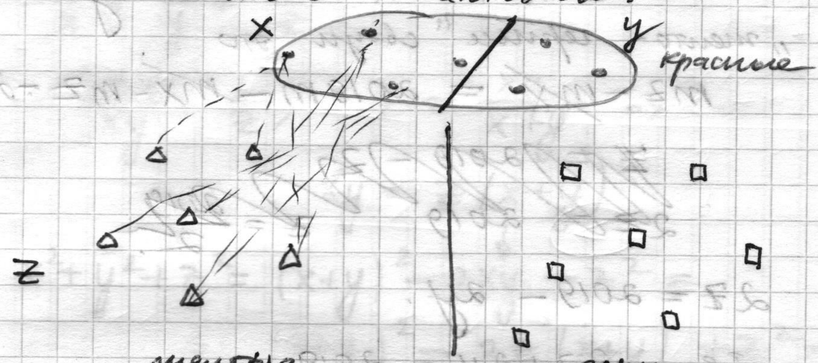
$\angle CBN = \angle BCN = \angle BAC.$

Отсюда,

$\angle MAC = \angle ACN.$

№5.

Пусть не найдется красной точки, которая соединена и с черной, и с желтой точкой. Значит все красные делятся на 2 типа: те, которые соединены только с черными или только с желтыми.



Пусть красных $1^{\underline{го}}$ типа $x^{\text{шт}}$,
а $2^{\underline{го}}$ y шт,
И пусть степень каждой точки m.

~~Тогда всего отрезков должно быть~~
$\cancel{\frac{2019\cdot m}{2}}$

Если желтых – z, то из них выходит всего $m\cdot z$ отрезков, среди которых mx соединяются с красными.
Значит желто-черных ~~отрезков~~ (т.к. нет одноцветных отрезков)
$mz - mx$.
С другой стороны черные соединяются с красными (всего my отрезков)

и с желтыми.

всего черных точек: $2019 - x - y - z$.

Тогда „желто-черных" связей

$$m(2019 - x - y - z) - my =$$

$$= 2019m - mx - mz - 2my$$

„желто-черные" связи это

$$mz - \cancel{mx} = 2019m - \cancel{mx} - mz - 2my$$

~~$z = 2019 - z$~~

~~$2z = 2019$~~ ~~$z = \frac{2019}{2}$.~~

$$2z = 2019 - 2y.$$

т.е. $2z + 2y = 2019$.

слева четное число

справа нечетное число.

Противоречие.

Значит, наше предположение неверно. Следовательно, найдется красная точка, которая соединена и с черной и с желтой точкой.

№ 2.

~~Заметим, что т.к. $z \geq 1$, то $\frac{1}{z} \leq 1$~~

~~$\Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$.~~

~~т.к. если $\frac{1}{x} = 1$, то $y = 0 \notin \mathbb{N}$~~

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}.$$

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{z}; \qquad z = \frac{xy}{x+y} \Rightarrow$$

$$xy = z(x+y).$$

$$x^2+y^2+z^2 = (x+y)^2 - 2xy + z^2 =$$

$$= (x+y)^2 - 2z(x+y) + z^2 =$$

$$= (x+y-z)^2$$ — квадрат целого числа $(x+y-z)$.

$x+y-z \in \mathbb{Z}$, т.к. $x, y, z \in \mathbb{N}$.