№1.

1	2	3	4	5	Σ
7	7	0	7	7	28

$f(x) = x^2 + ax + b$

$g(x) = x^2 + px + q$

$f(1) + f(10) + f(100) = 1^2 + a + b + 10^2 + 10a + b + 100^2 + 100a + b$

$g(1) + g(10) + g(100) = 1^2 + p + q + 10^2 + 10p + q + 100^2 + 100p + q$

$1^2 + a + b + 10^2 + 10a + b + 100^2 + 100a + b = 1^2 + p + q + 10^2 + 10p + q + 100^2 + 100p + q$

$111a + 3b = 111p + 3q$

$37a + b = 37p + q$

Докажем, что при $x = 37$ $f(x) = g(x)$

$f(37) = 37^2 + 37a + b$

$g(37) = 37^2 + 37p + q$

$37^2 + 37a + b = 37^2 + 37p + q$, т.к. $37a + b = 37p + q$ (по доказанному)

Докажем, что других решений нет.

$f(x) = g(x)$

$x^2 + ax + b = x^2 + px + q$

TM-150

$37a+b=37p+q$

Докажем, что при $x=37$ $f(x)=g(x)$

$f(37)=37^2+37a+b$

$g(37)=37^2+37p+q$

$37^2+37a+b=37^2+37p+q$, т.к. $37a+b=37p+q$ (по доказанному)

Докажем, что других решений нет.

$f(x)=g(x)$

$x^2+ax+b=x^2+px+q$

$(a-p)x=q-b$

Если $a\neq p$, то это линейное уравнение с 1 корнем.

Если $a=p$, то $b\neq q$, т.к. трёхчлены различны, то уравнение не имеет корней, но 37 – корень.

Ответ: $x=37$.

№2.

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x^2}{x^2+1} \geq 0 \\[2ex] z = \dfrac{2y^2}{y^2+1} \geq 0 \\[2ex] x = \dfrac{2z^2}{z^2+1} \geq 0 \end{cases}$$

1) Предположим, что $x > 1$. Тогда $x^2 > 1$, то $2x^2 > x^2+1$, то $y > 1$.

Сравним x и y.

$$x > \frac{2x^2}{\underbrace{x^2+1}_{>0}}$$

$$\frac{x^3+x}{x^2+1} > \frac{2x^2}{x^2+1}, \text{ т.к.}$$

$$\frac{x^3+x}{x^2+1} - \frac{2x^2}{x^2+1} = \frac{x^3-2x^2+x}{x^2+1} = \frac{x(x-1)^2}{x^2+1} > 0$$

т.е. если $x > 1$, то $1 < y < x$.

Тогда аналогично $1 < z < y$ и $1 < x < z$, откуда мы получим $x > y > z > x$, что неверно. Значит, если решение существует, то $x \leq 1$.

2) Предположим, что $0 < x < 1$. Тогда $x^2 < 1$, то $2x^2 < x^2+1$, то $y < 1$

+

ТМ-150

т.е. если $x>1$, то $1<y<x$.
Тогда аналогично $1<z<y$ и $1<x<z$, откуда мы получим $x>y>z>x$, что неверно. Значит, если решение существует, то $x \le 1$.

г) Предположим, что $0<x<1$. Тогда $x^2<1$, то $2x^2<x^2+1$, то $y<1$.

Сравним x и y.

$$x > \frac{2x^2}{x^2+1}$$

$$\frac{x^3+x}{x^2+1} > \frac{2x^2}{x^2+1}, \text{ т.к.}$$

$$\frac{x^3+x}{x^2+1} - \frac{2x^2}{x^2+1} = \frac{x(x-1)^2}{x^2+1} > 0$$

т.е. если $0<x<1$, то $0<y<x<1$.
Тогда аналогично $0<z<y<1$ и $0<x<z<1$, откуда мы получим $x>y>z>x$, что неверно. Значит, если решение существует, то $x=0$ или $x=1$ (понятно, что $x\ge 0$, т.к. $x=\frac{2z^2}{z^2+1}\ge 0$).

ТМ-150

ТМ - 150

Если $x=0$, то $y=0$ и $z=0$ – решение.

Если $x=1$, то $y=1$ и $z=1$ – решение.

Ответ: $x=y=z=0$ и $x=y=z=1$.

TM-150

№4.

По неравенству треугольника:

~~[illegible]~~

$a+b>c$, $a+c>b$, $b+c>a$

Докажем, что $\dfrac{a^2+2bc}{b^2+c^2}>1$

• Если $b<c$, то из $a+b>c \Rightarrow \underbrace{a}_{>0} > \underbrace{c-b}_{>0}$

$$a^2>(c-b)^2=b^2-2bc+c^2$$

$$a^2+2bc>b^2+c^2$$

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}>1$$

• Если $c\le b$, то из $a+c>b \Rightarrow \underbrace{a}_{>0} > \underbrace{b-c}_{\ge 0}$

$$a^2>(b-c)^2=b^2-2bc+c^2$$

ТМ-150

• Если $b < c$, то из $a + b > c \Rightarrow \underbrace{a}_{>0} > \underbrace{c - b}_{>0}$

$$a^2 > (c-b)^2 = b^2 - 2bc + c^2$$

$$a^2 + 2bc > b^2 + c^2$$

$$\frac{a^2 + 2bc}{b^2 + c^2} > 1$$

• Если $c \leq b$, то из $a + c > b \Rightarrow \underbrace{a}_{>0} > \underbrace{b - c}_{\geq 0}$

$$a^2 > (b-c)^2 = b^2 - 2bc + c^2$$

$$a^2 + 2bc > b^2 + c^2$$

$$\frac{a^2 + 2bc}{b^2 + c^2} > 1$$

Для остальных слагаемых доказывается аналогично. Тогда сумма трёх чисел, каждое из которых больше 1, больше 3, т.е. $\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2} + \frac{b^2+2ac}{c^2+a^2} + \frac{c^2+2ab}{a^2+b^2} > 3$.

ТМ-150

№ 5.

Заметим, что 1 – чёрная, т.к. если 1 – белая, то чёрное число умноженное на 1 равно белому, что невозможно. (Если чёрных чисел нет вообще, то всё уже выполнено).

Пусть первые n чисел – чёрные. Тогда число $(n+1)$ – белое.

Докажем, что число белое тогда и только тогда, когда оно кратно $(n+1)$. (по индукции)

~~Предположим, что ? – наименьшее число, ...~~
~~$(n+1)$ ... чёрное~~

Во-первых, заметим, что если число – белое, то следующие n чисел – чёрные, т.к. их можно сложить его с числами от 1 до n, а с

TM-150

~~(n+1) и чёрн~~

Во-первых, заметим, что если число — белое, то следующие n чисел — чёрные, т.к. мы можем сложить его с числами от 1 до n, а сумма белого и чёрного — чёрная.

~~[illegible]~~

Предположим, что первое k белых чисел ~~[illegible]~~ равны $(n+1), 2(n+1), \ldots k(n+1)$ (при $k=1$ это верно). Тогда по доказанному выше, следующее белое число не меньше, чем $k(n+1)+(n+1)=(k+1)(n+1)$.

Теперь докажем, что число $(k+1)(n+1)$ — белое. Предположим, что оно чёрное. Тогда все числа больше $k(n+1)$ будут чёрными, т.к. мы можем прибавлять к числам, начиная с $k(n+1)+1$, число $(n+1)$ и получать чёрное число, т.к. сумма чёрного и белого — чёрная, а т.к. $k(n+1)+1+(n+1)=(k+1)(n+1)+1$, то у нас не будет „пробелов" в чёрных числах.

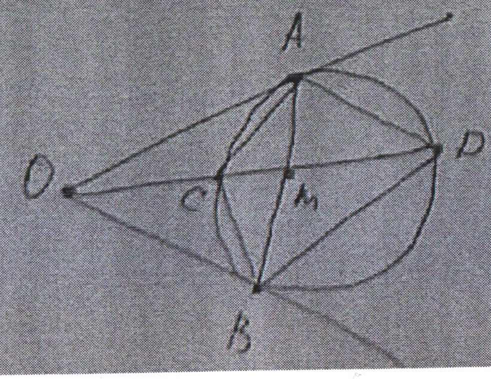
ТМ-150

Но тогда белых чисел — конечное число и среди них есть наибольшее. Тогда оно, умноженное на следующее число, будет чёрным, но должно быть белым.

Противоречие.

Значит, число белое тогда и только тогда, когда оно кратно $(n+1)$, но произведение двух чисел, кратных $(n+1)$, кратно $(n+1)$, то произведение двух белых — белое.

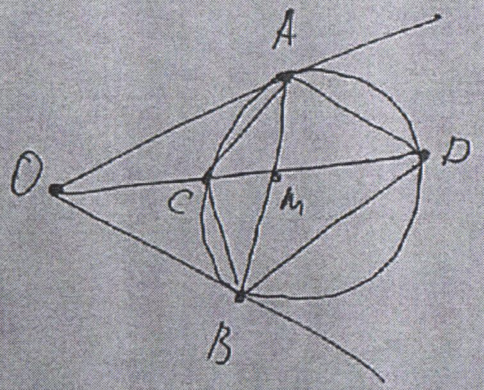
~3.



ТМ-150

... произведение чисел,
кратных $(n+1)$, кратно $(n+1)$, то произведение
двух белых — белое.

№4.



Решение.

$OA^2 = OB^2 = OC \cdot OD$ (по св-ву отрезков секущей)

$AM \cdot MB = CM \cdot MD$ (по св-ву хорд)

1