ХМ-152

№1.

$f(x)=x^2+ax+b$

$g(x)=x^2+px+q$

$f(1)+f(10)+f(100)=g(1)+g(10)+g(100)$

$(1^2+a\cdot 1+b)+(10^2+a\cdot 10+b)+(100^2+$

$+100a+b)=(1^2+p\cdot 1+q)+(10^2+p\cdot 10+q)+$

$+(100^2+100\cdot p+q)$

$111a+3b=111p+3q$

$37a+b=37p+q$

$b-q=37(p-a)$

Когда $f(x)=g(x)$

$x^2+ax+b=x^2+px+q$

$b-q=x(p-a)$

$x(p-a)=b-qx=37(p-a)$

$x(p-a)=37(p-a)$

1

1	2	3	4	5	Σ
7	7	0	7	7	28

ХМ-152

1. $p - a = 0$; $x \in R$

$p = a$

$b - q = 37(p - a)$

$b - q = 0$

$b = q$

$p = a, b = q$, значит $f(x)$ и $g(x)$ совпадают, что противоречит условию

2. $p - a \neq 0$

$x = 37$

Ответ: 37.

2

$$\begin{cases} \frac{2x^2}{x^2+1} = y \\ \frac{2y^2}{y^2+1} = z \\ \frac{2z^2}{z^2+1} = x \end{cases}$$

N 2.

1) $z^2 \geq 0$

$2z^2 \geq 0$

$z^2 + 1 > 0$

$\frac{2z^2}{z^2+1} \geq 0$ при $z \in R$

$x \geq 0$

Т.к. уравнение - симметричное, т ~~аналогично~~ и $y \geq 0$; $z \geq 0$

4 Пусть ~~$x < 1$, т. е. $0 <$~~ $0 < x < 1$, тогда

$y \vee x$

$\frac{2x^2}{x^2+1} \vee x \mid \cdot x^2+1 \ (x^2+1>0)$

$2x^2 \vee x^3 + x$

$0 \vee x(x^2 - 2x + 1)$

$0 \vee x(x-1)^2$

$(x-1)^2 > 0$ $(0 < x < 1$, значит $-1 < x-1 < 0)$

$x > 0$

Значит $0 < x(x-1)^2$, т.е. $y < x$

ХМ-152

~~Т.к. уравнение симметричное~~,
значит:
$0<y<1$, аналогично получим

$z<y$

Аналогично получим $x<z$

Следовательно $x<z<y$ и $y<z$, что невозможно.
Значит $x \notin (0;1)$

Пусть $x>1$, тогда

$\frac{2x^2}{x^2+1} \quad y \vee x$

$\frac{2x^2}{x^2+1} \vee x \mid \cdot x^2+1$ (т.к. $x^2+1>0$)

$2x^2 \vee x^3+x$

$0 \vee x(x-1)^2$

$x>1>0$

$x>1$

$x-1>0$

$(x-1)^2>0$

Значит $0<x(x-1)^2$, т.е. $y<x$

Возможны 4 варианта (помня, что $y \geq 0$):

~~1. $y<1$ (0<~~

1. $y=0$, тогда $z=\frac{2\cdot y^2}{y^2+1}=\frac{2\cdot 0^2}{0^2+1}=0$

$x=\frac{2z^2}{z^2+1}=\frac{2\cdot 0^2}{0^2+1}=0$

$x=0>1$ – невозможно, т.е. $y \neq 0$

2. $0<y<1$, тогда аналогично z):

$0<z<y<1$

$0<x<z<1$, но $x>1$ – невозможно, значит $y \geq 1$

1. $y=1$, тогда $z=\frac{2y^2}{y^2+1}=\frac{2\cdot 1^2}{1^2+1}=1$

$x=\frac{2z^2}{z^2+1}=\frac{2\cdot 1^2}{1^2+1}=1$

$x=1$ и $x>1$ – ~~при~~ невозможно,

ХМ-152

т.е. $y \neq 1$

ч. $y > 1$ – единственный оставшийся вариант

Тогда аналогично получим, что $1 < z < y$

И снова аналогично получим: $1 < x < z$

Значит $z < y < x$ и $x < z$ - невозможно

И этот вариант невозможен, т.е. $x \notin (1;+\infty)$

4) $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \notin (0;1) \\ x \notin (1;+\infty) \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$ - значения, которые может принимать x.

Если $x = 0$, то $y = \frac{2x^2}{x^2+1} = \frac{2 \cdot 0^2}{0^2+1} = 0$

$z^2 = \frac{2y^2}{y^2+1} = \frac{2 \cdot 0^2}{0^2+1} = 0$

$x = \frac{2z^2}{z^2+1} = \frac{2 \cdot 0^2}{0^2+1} = 0$

Следовательно $(0;0;0)$ - корень уравнения

Если $x = 1$, то $y = \frac{2x^2}{x^2+1} = \frac{2 \cdot 1^2}{1^2+1} = 1$

$z = \frac{2y^2}{y^2+1} = \frac{2 \cdot 1^2}{1^2+1} = 1$

$x = \frac{2z^2}{z^2+1} = \frac{2 \cdot 1^2}{1^2+1} = 1$

Следовательно $(1;1;1)$ - корень уравнения.

Ответ: $x = y = z = 1$ или $x = y = z = 0$.

№5.

Предположим противное: Существуют 2 белых числа, такие, что $б_1 \cdot б_2 = ч_1$

~~Обозначим одно из них как $б_1$, другое как $б_2$~~

Буквами б и ч будем обозначать произвольные белые и чёрные числа соответственно.

Числа с одинаковыми индексами равны.

$б_1 \cdot б_2 = ч_1$

$б_1 \cdot ч = б$ (по усл.)

Сложим эти равенства

XM-152

$б_1 \cdot б_2 + б_1 \cdot ч = ч_1 + б$

$ч_1 + б = ч$ (по усл.)

$б_1(б_2 + ч) = ч$

$б_2 + ч = ч$ (по усл.)

$б_1 \cdot ч = ч$, но по условию $б \cdot ч = б$. $б = ч$, т.е. одно число покрашено в 2 цвета, что противоречит условию. Получаем противоречие предположению.

+

Следовательно не существует таких $б_1$ и $б_2$, что $б_1 \cdot б_2 = ч$, т.е. $б \cdot б \neq ч$, а так как произведение двух натуральных чисел - натуральное число, то полученное число должно иметь цвет (и не быть чёрным), т.е. быть белым, т.е. $б \cdot б = б$.

№ 4.

Пусть ~~с длина А~~ $a; b; c$ - длина BC; AC и AB соответственно, значит $a; b; c > 0$; $\angle A; \angle B; \angle C \in (0°; 180°)$.

По теореме косинусов:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos\angle C$

$c^2 + 2ab\cos\angle C = a^2 + b^2$

$\cos\angle C < 1$, ~~значит~~, т.к. $0° < \angle C < 180°$, значит

$c^2 + 2ab > a^2 + b^2$

+

$a^2 > 0$, $b^2 > 0$ (т.к. $a; b > 0$), то $\dfrac{c^2 + 2ab}{a^2 + b^2} > 1$ (1)

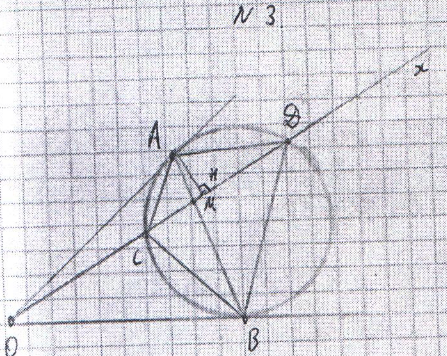
Аналогично (2) $\dfrac{a^2 + 2bc}{b^2 + c^2} > 1$; $\dfrac{b^2 + 2ac}{a^2 + c^2} > 1$ (3)

(1) + (2) + (3)

$\dfrac{a^2 + 2bc}{b^2 + c^2} + \dfrac{b^2 + 2ac}{a^2 + c^2} + \dfrac{c^2 + 2ab}{a^2 + b^2} > 3$ - неравенство доказано.

XM-152

№ 3



1) $CM \cdot MD = AM \cdot MB$ (по св-ву окр.)

$OC \cdot OD = OA^2 = OB^2$ (по св-ву секущей и касательной)

2) Д.п. $AH \perp CD$

$S_{AOC} = \frac{1}{2} OC \cdot AH$

$S_{AOM} = \frac{1}{2} OM \cdot AH$

$S_{AOD} = \frac{1}{2} OD \cdot AH$

$S_{MAD} = \frac{1}{2} MD \cdot AH$

$\frac{S_{OAC}}{S_{OAD}} = \frac{AC}{AD}$, т.к. $\triangle OAC \sim \triangle OAD$ (по двум углам):

?

1. $\angle O$ - общий
2. $\angle OAC = \frac{1}{2} \cup AC = \angle ADC$

$\frac{S_{ACM}}{S_{AMD}} = \frac{\frac{1}{2} CM \cdot AH}{\frac{1}{2} MD \cdot AH} = \frac{CM}{MD}$

$S_{ACM} = \frac{1}{2} AC \cdot AM \cdot \sin \angle CAM$

$S_{AMD} = \frac{1}{2} AM \cdot AD \cdot \sin \angle MAD$

$\frac{AC \cdot \sin \angle CAM}{AD \cdot \sin \angle MAD} = \frac{S_{ACM}}{S_{AMD}} = \frac{CM}{MD}$

—