МК - 107

№1.

Вычислим ещё несколько результатов через каждую минуту. Как нам уже известно, через 1 минуту на доске записано 19,

2 мин - 24
3 мин $2 \cdot 4 + 15 = 23$
4 мин $2 \cdot 3 + 15 = 21$
5 мин $2 \cdot 1 + 15 = 17$
6 мин $1 \cdot 7 + 15 = 22$
7 мин $2 \cdot 2 + 15 = 19$

1	2	3	4	5
7	5	7	7	7

Мы видим, что на 7-ой минуте число повторилось. Значит у нас есть цикл. Его „объём“ - 6 чисел. Всего за 60 мин совершится ровно 60:10 = 6 циклов, значит на доске будет написано число 22, завершающее этот цикл.

Ответ: 22.

№2.

Если мы сложим процент всех ребят, изучающих C++, и всех ребят, изучающих Python, у нас получится число, превышающее 100% именно на столько, сколько ребят в процентах изучает оба языка.

Пусть x% - изучает C++
y% - Python

$x + y = 2021 + z$
$y = 2021 - x + z$

Тогда $x + y = 100 + z$, где z% - изучает оба языка

Для того чтобы y было наибольшим, нужно чтобы x было наименьшим из возможных, а z - наибольшим

Наименьшее x - 70% и наибольшее z - 8%. Подставим эти значения в уравнение

$70 + y = 100 + 8$
$y = 38$

Найдем, сколько школьников составляют 38%

2021 · 0,38 = 767,98 , то есть 768 школьников

Проверим.

70% это 2021 · 0,7 = 1414,7 , т.е. 1415 школьников
8% это 2021 · 0,08 = 161,68 , т.е. 162 школьника

1415 + 768 = ~~...~~ 2021 + 162 Это уже > 8%
2183 = 2183

Ответ: 768 школьников изучают Python

$$y = 2021 - x + z \leq 767$$

№3.

Разберем все варианты размещения „2021" в числе

1) начиная с 1-ой цифры.
Тогда оставшиеся 5 цифр можно записать
$3^5 = 243$ способами

Но среди этих чисел встретятся также: 20212021x ← 3 способа и
2021x2021 ← 3 способа
Про эти вариант стоит запомнить, чтобы не посчитать во второй раз.

2) начиная со 2-ой цифры. _2021----

Таких вариантов: $2 \cdot 3^4 = 162$ способа

Среди них есть x20212021 ← 2 способа

3) начиная с 3-ей цифры

$2 \cdot 3^4 = 162$ способа

4) начиная с 4-ой цифры
$2 \cdot 3^4 = 162$ способа

МК-107

...чиная с 5-ой цифры.

$2 \cdot 3^4 = 162$ способа

Но тут мы встретим вариацию 2021 2021 x

Вычтем 3 варианта записи такого числа, чтобы не повторять

Итого, $162 - 3 = 159$ способов

в) начиная с 6-ой цифры

$2 \cdot 3^4 = 162$ способа, среди которых есть уже нам встречавшиеся 2021x2021 и x2021 2021. Вычтем их

Итого, $162 - 3 - 2 = 157$ способов

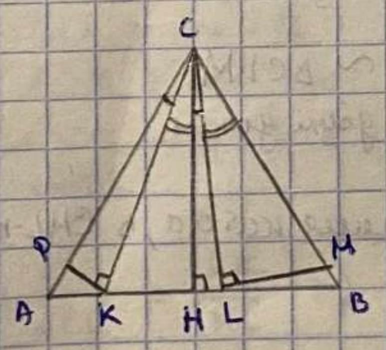
~~Значит~~ Больше вариантов быть не может

Сложим получившиеся значения

$243 + 162 + 162 + 162 + 159 + 157 = 1045$ способов

Ответ: 1045 способов

№4.



Дано:
$\triangle ABC$ - р/б
$K \in AB$
$L \in AB$
$\angle KCL \leq \frac{1}{2} \angle ACB$
Д-ть:
$KL \leq \frac{1}{2} AB$

Док-во.

Рассмотрим случай, когда $\angle KCL = \frac{1}{2} ACB$.

Проведём высоту CH. Она же биссектриса и медиана (т.к. $\triangle ABC$ - р/б)

$\angle ACH = \angle HCB$

$\angle ACK + \angle KCH = \angle HCL + \angle LCB$

$\angle KCL = \frac{1}{2} \angle ACB$

$\angle KCH + \angle HCL = \angle HCB$

· $\angle KCH = \angle LCB$

· $\angle ACK = \angle HCL$

~~Рассмотрим треугольники ΔACK и ΔCHL~~

Отрезок HL является частью KL

$KL \leq \frac{1}{2} AB$ (надо д-ть)

Чтобы это соблюдалось KL должен быть не больше единицы оставшихся в AB отрезков AK и LB

$KH + HL \leq AK + LB$

Сначала докажем, что KH не ~~меньше~~ больше LB

Проведём LM так, что $\angle CLM = 90°$, $M \in CB$

Рассмотрим ΔCHK и ΔCLM

$$\left.\begin{matrix} 1)\ \angle CHK = 90° = \angle CLM \\ 2)\ \angle KCH = \angle LCM \end{matrix}\right| \Rightarrow \Delta CHK \sim \Delta CLM$$ по двум углам

$CL > CH$ (т.к. гипотенуза всегда больше катета, ΔCHL - прямоуг.)

$\frac{CL}{CH} > 1$

~~[illegible]~~

$\frac{S_{\Delta CLM}}{S_{\Delta CHK}} > 1$, $S_{\Delta CLM} > S_{\Delta CHK}$

Значит площадь ΔCLB, ~~площадь~~ которая складывается из площадей ΔCLM и ещё ΔLMB будет явно больше площади ΔCHK

МК-107

$\frac{S_\Delta CLB}{S_\Delta CHK} > 1$

Эти площади также связаны зависимостью от KH и LB, т.к. они имеют вершину в одной точке и противоположной этой вершине стороны лежат на одной прямой

$$\frac{S_\Delta CLB}{S_\Delta CHK} = \frac{LB}{KH} > 1$$

Значит $LB > KH$

По аналогии можно сделать вывод, что $AK > HL$:
Проведём KP так, что $\angle CKP = 90°$, $P \in AC$
$\Delta PCK \sim \Delta HCL$ по двум углам ($\angle CKP = 90° = \angle CHL$; $\angle PCK = \angle HCL$)

$CK > CH$ (как гипотенуза и катет ΔKCH)

$\frac{CK}{CH} > 1$

$\frac{S_\Delta PCK}{S_\Delta HCL} > 1$

$S_\Delta PCK > S_\Delta HCL$
$S_\Delta ACK > S_\Delta HCL$

$\frac{S_\Delta ACK}{S_\Delta HCL} > 1$

$$\frac{S_\Delta ACK}{S_\Delta HCL} = \frac{AK}{HL} > 1$$

Тем самым, мы доказали, что $AK > HL$

Значит

$LB + AK > KH + HL$
$KL < LB + AK$
$KL < \frac{1}{2} AB$

KL будет равно $\frac{1}{2}$ AB только в том случае, одна из точек совпадает с серединой AB, а другая одним из её концов.

Если ~~шах~~ $\angle KCL < \frac{1}{2}\angle ACB$, то KL будет ещё меньше по отношению к AB, сравнивая с тем случаем, когда $\angle KCL = \frac{1}{2}\angle ACB$.

Таким образом $KL \leq \frac{1}{2}AB$

чтд.

№5.

Чтобы эти уравнения имели ~~[illegible]~~ корни вообще, в них обоих дискриминант должен быть больше или равен 0.

$x^2 + ax + b^2 = 0$
$D = a^2 - 4b^2$

$x^2 + bx + a^2 = 0$
$D = b^2 - 4a^2$

$$\begin{cases} a^2 - 4b^2 \geqslant 0 \\ b^2 - 4a^2 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 \geqslant 4b^2 \\ b^2 \geqslant 4a^2 \end{cases}$$

$a^2 \geqslant 4b^2$
$4a^2 \geqslant 16b^2$

$b^2 \geqslant 4a^2 \geqslant 16b^2$
$b^2 \geqslant 16b^2$
это условие будет выполняться только, когда $b = 0$

$b = 0$, тогда и a только равно 0.

Получается единственный возможный вариант, когда оба уравнения будут вообще иметь корни, это

МК-107

…а $a = 0$ и $b = 0$

В таком случае оба уравнения превратятся в $x^2 = 0$, корнем которого является $x = 0$.