165-141-997-73

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике.

8класс . 165-141-997-73

ТЕТРАДЬ

для ______________________

____

учени__________ класса __________

__________ школы __________

____

____

Чистовик

№1.

Пусть S_a – сумма всех ~~камн~~ минералов в 1 ряду, S_b – сумма всех минералов во 2 ряду. S_c – сумма всех минералов в 3 ряду. a – камень, который переложим из 1 ряда, b – из 2 ряда, c – из 3 ряда. Пусть $a_{ср.}$ – средняя масса минералов в 1 ряду, $b_{ср.}$ – во 2 ряду, $c_{ср.}$ – в 3 ряду. n – количество минералов в 3 ряду.

Тогда

$$\begin{cases} \frac{S(a)-a+c}{12} = a_{ср.}+1г. \\ \frac{S(b)-b+a}{12} = b_{ср.}+2г \\ \frac{S(c)-c+b}{n} = c_{ср.}-4г. \end{cases}$$

$\frac{S(a)}{12} = a_{ср.}$

$\frac{S(b)}{12} = b_{ср.}$

$\frac{S(c)}{n} = c_{ср.}$

$$\begin{cases} c-a = 12г \\ a-b = 24г \\ b-c = -4n\,г \end{cases}$$

$0 = 36г - 4nг$

$36 = 4n$

$n = 9$ Ответ: 9 минералов лежало в 3 ряду.

№3

если эти четырёхзначные числа могут быть отрицательными, то можно, иначе нельзя.

Пример:

3789 и -1289 $\quad 3<7<8<9;\ 1<2<8<9.$

$3789+(-1289)=2500$

если эти 2 числа — ~~положительные~~ натуральные.

$\overline{abcd}+\overline{xyze}=2500$

$a<b<c<d;\ x<y<z<e$

$e>0,\ d>0$, иначе $c<0$ и $z<0$, но c и z — цифры, $c\geq 0$, $z\geq 0$, противоречие, значит $e\neq 0$ и $d>0$.

Тогда $e+d=0$ или $e+d=10$

тогда $e=0$, $d=0$, так как $e\geq 0$ и $d\geq 0$, но $e>0$ и $d\neq 0$, значит, $e+d\neq 0$

Тогда $1+c+z=0$ или $1+c+z=10$

тогда $c+z=-1$, но $c\geq 0$ и $z\geq 0$. значит, $1+c+z\neq 0$.

Тогда

$1+c+z=10$

$c+z=9$

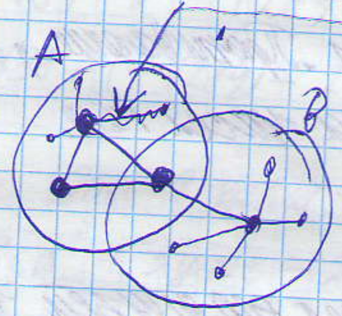
Пусть x и y — некоторые натуральные числа. Пусть $d = c + x$ и $e = z + y$. Тогда

$e + d = c + x + z + y = 10$. Так как $c + z = 9$, то $x + y = 1$. Минимальное значение x и y — 1. Тогда $2 = 1$, но $2 > 1$. если $x > 1$ или $y > 1$, то $x + y \geq 2$, но $x + y = 1$. Противоречие, значит, таких 2 четырёхзначных чисел нет.

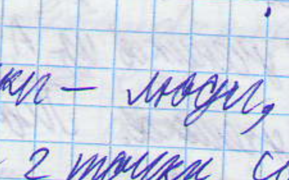
№ 4.

Возьмём ученика и всех его друзей в множество A. Тогда в том ≥ 9 учеников. Возьмём ученика, не находящегося в множестве A, а всех его друзей. Это множество B. в нём ≥ 9 учеников. ~~Тогда~~ Так как всего 15 учеников в классе, то в $A \cap B$ будет хотя бы 1 ученик. Возьмём его. В $A \cup B$ будет ≥ 9 учеников из A + 1 из вне A. В $A \cup B$ будет ≥ 10 учеников. Тогда вне $A \cup B$ будет ≤ 5 учеников. Ученик, находящийся в $A \cap B$ точно имеет 1 друга из A, 1 друга из B. Значит, он имеет ещё хотя бы 6 друзей. Так как

6 > ~~[illegible]~~ (числа, меньшего или равного 5), то у него есть хотя бы ещё 1 друг из $A \cup B$, кр тех 2, которых мы уже посчитали. если этот друг $\in A$, то вот они 3 друга

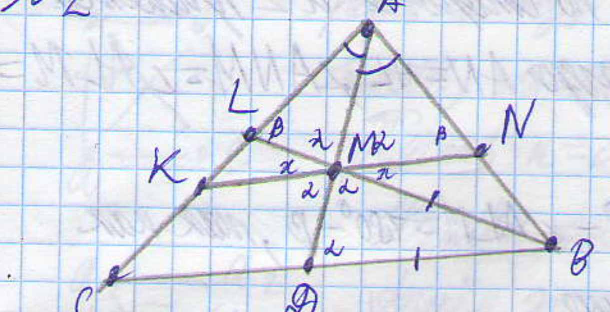


если этот друг $\in B$, то вот они эти 3 друга



точки – люди, ~~а рёбра – дружба~~
если 2 точки соединены ребром, это означает, что эти 2 человека дружат.

№2



Дано:
$\triangle ABC$
AD – биссектриса $\angle CAB$,
$BM = BD$.
$M \in AD$
$BM \cap AC = L$
$KM \parallel CB$
$KM \cap AB = N$.
Доказать: $AK = AB$

Доказательство:

1) Пусть $\angle NMB = x$, $\angle BDM = \alpha$. Тогда $\angle DMB = \alpha$, так как $\triangle MBD$ – равнобедренный с основанием MD. Тогда $\angle KMD = \alpha$, так как $\angle KMD = \angle MDB$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых KN и CB и секущей MD.

$\angle KML = x$, так как вертикальные углы – $\angle NMB$ и $\angle LMK$.

$\angle AML = \alpha$, так как $\angle AML$, $\angle BMD$ – вертикальные углы.

$\angle AMN = \alpha$, так как $\angle KMD$, $\angle AMN$ – вертикальные углы.

$\angle LAM = \angle NAM$, так как AD – биссектриса $\angle CAB$.

2) $\triangle AML$ и $\triangle AMN$
AM – общая,
$\angle LMA = \angle NMA$ по доказанному,
$\angle LAM = \angle MAN$ по доказанному,

Значит, $\triangle AML = \triangle AMN$ по стороне и 2 прилежащим к ней углам. Тогда $AN = AL$, $\angle ANM = \angle ALM = \beta$, $LM = MN$.

Тогда $\angle KLM = 180^\circ - \angle ALM = 180^\circ - \beta$, так как $\angle KLM, \angle ALM$ – смежные.

Тогда $\angle MNB = 180^\circ - \angle ANM = 180^\circ - \beta$, так как $\angle MNB, \angle ANM$ – смежные.

Тогда $\angle KLM = \angle MNB$.

3) $\triangle LKM$ и $\triangle NBM$

$LM = MN$,

$\angle KLM = \angle MNB$,

$\angle LMK = \angle NMB$

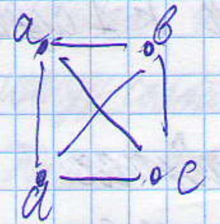
по доказанному.

Значит, $\triangle LKM = \triangle NBM$ по стороне и 2 прилежащим к ней углам. Тогда $LK = NB$.

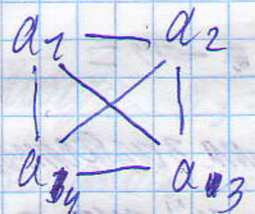
4) $AK = AL + LK$, $AB = AN + NB$. Так как $LK = NB$ и $AN = AL$, то $AK = AB$, ч.т.д.

№5

~~Пусть~~ Зарисуем суммы в виде квадрата с диагоналями.



ребро между 2 точками — сумма чисел, стоящих в этих точках.
Пусть $a=a_1$, $b=a_2$, $c=a_3$, $d=a_4$.



Назовём ~~его~~ ребро известным, если Артём запомнил ~~ее~~ эту сумму. и неизвестным, если не запомнил.

Тогда у нас известно 4 ребра: 0; 3; 6; 18.
Это либо 4 стороны квадрата (I случай), либо 3 стороны (II случай) и 1 диагональ квадрата, либо 2 диагонали (III случай) и 2 соседние стороны квадрата, либо 2 диагонали (IV случай) и 2 противоположные стороны квадрата.

I случай:

Тогда $(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+(a_3+a_4)+(a_4+a_1)=0+3+6+18$

$2a_1+2a_2+2a_3+2a_4=27$

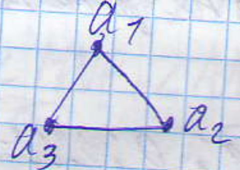
$a_1+a_2+a_3+a_4=13{,}5$. Так как a_1, a_2, a_3, a_4 — по условию целые, а 13,5 — не целое, то этот случай невозможен.

IV случай: $(a_1+a_2)+(a_2+a_4)+(a_1+a_3)+(a_3+a_4)=0+3+6+18$

$2a_1+2a_2+2a_3+2a_4=27$ → ~~это~~ пришли к I случ[аю], который невозможен.

Во II и в III случаях у нас найдётся треугольник, все рёбра которого известны.

Тогда: $(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+(a_3+a_1) =$



$= 2a_1+2a_2+2a_3$ = сумма 3 известных рёбер. $= 2(a_1+a_2+a_3)$ = чётное = периметр этого треугольника

Заметим, что 1 известное ребро — нечётное (именно 3), а 3 других известных ребра — чётные (0; 6; 18).

если в этом треугольнике будет это 1 нечётное ребро, то его периметр будет нечётным, а но периметр этого треугольника — чётный.

неч. + чёт + чёт = неч. $2(a_1+a_2+a_3)$

a_1, a_2, a_3, a_4 — целые ч[исла]

Значит, этот треугольник состоит из чётных рёбер. То есть $2(a_1+a_2+a_3)=0+6+18$

$2(a_1+a_2+a_3)=24$

$a_1+a_2+a_3=12$

Тогда мы можем найти числа, стоящие в

вершинах этого треугольника. (от перемещения между собой вершин треугольник не меняется)

Пусть тогда $a_1+a_2=0$

$a_2+a_3=6$

$a_3+a_1=18$

Тогда $a_3=12$; $a_2=-6$; $a_1=6$.

Осталось последнее число: a_4.

Были суммы:

a_1+a_2
a_1+a_3
a_1+a_4
a_2+a_3
a_2+a_4
a_3+a_4

Мы использовали:

a_1+a_2
a_2+a_3
a_3+a_1.

Остались:

a_1+a_4
a_2+a_4
a_3+a_4.

Значит:

$$\left[\begin{array}{l} a_1+a_4=3 \\ a_2+a_4=3 \\ a_3+a_4=3 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} a_4=-3 \\ a_4=9 \\ a_4=-9 \end{array}\right.$$

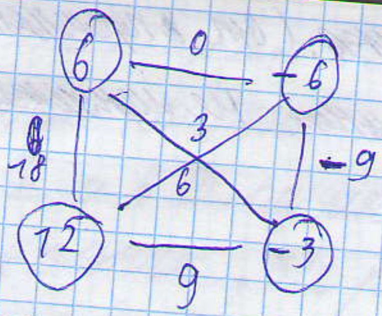
Получилось 3 варианта:

I 6; −6; 12; −3.

II 6; −6; 12; 9.

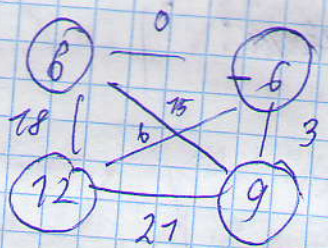
III 6; −6; 12; −9.

I



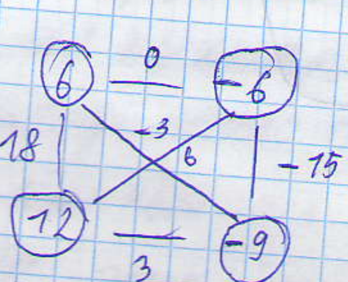
Так как −9 — это не натуральное двузначное число, то I случай невозможен.

II



15 и 21 — натуральные двузначные числа, всё подходит.

III



Так как −15 — это не натуральное двузначное число, то III случай невозможен

IV

Тогда:

$a = 6$; $b = 12$; $c = -6$; $d = 9$.

1) $a + b = 18$

2) $a + c = 0$

3) $a + d = 15$

4) $b + c = 6$

5) $b + d = 21$

6) $c + d = 3$

Артём услышал 1); 2); 4); 6).
а про 5) и 3) запомнил, что это натуральные двузначные числа.

Ответ: Данил задумал числа 6; 12; -6; 9.