МБ-109

Hatber

Муниципальный этап по математике ученика 10 класса

МБ

ТЕТРАДЬ

для ______________________________

____

учени __________ класса __________

__________ школы __________

____

____

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	7	7	35

№1.

Да, это возможно.

Сначала 331 раз мы делим 1 из листочков на 6 частей, т.е.

$1 \to 6 \to 11 \to 16 \ldots$ (331 операция)

Тогда листочков получится $1-331+331\cdot 6$ (л.)

Далее 33 раза повторяем операцию деления одного из листочков на 12 частей и получаем

$1-331+331\cdot 6-33+33\cdot 12$ листочков.

$1-331+331\cdot 6-33+33\cdot 12 = 1+331\cdot 5+33\cdot 11 =$

$=1+1655+363 = 1+2018 = 2019$

Ответ: да, возможно.

⊕

№2.

Докажем, что у когда-нибудь мы придем к уравнению $x^2+(a+1)x+a=0$

~~От противного:~~

~~Предположим, что такого не случилось~~ Тогда посмотрим на разность коэффициента при x и свободного члена, после каждой операции

k при x	свободный член	разность
10	20	−10
...	...	...
20	10	10

Т.к. каждой операцией мы уменьшаем или увеличиваем одно из чисел ~~на~~ ровно на 1, то и разность уменьшается или увеличивается ровно на 1.

Т.к. изначально разность была (−10), а в конце стала (10), то ~~мы~~ во время операций мы ~~все~~ точно получили все целые числа от (−10) до (10). ~~т.к.~~

~~При~~ Тогда мы точно в какой-то момент получим 1. Значит, в какой-то момент k при x был на 1 больше, чем свободный член, т.е. уравнение имело вид $x^2+(a+1)x+a=0$

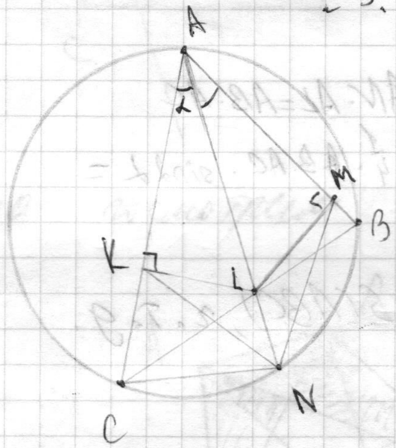
Итог корни $(-a)$ и (-1).

~~Т.к.~~ ~~а~~ При этом ~~который~~ ~~ра~~ $(-a)\in Z$; $(-1)\in Z$

Значит, ~~такое~~ это верно.

Ответ: да, верно.

3.



1. $\triangle ALK = \triangle ALM$ (по гипотенузе и острому углу)

   1. AL - общая
   2. $\angle AKL = \angle AML = 90^\circ$
   3. $\angle KAL = \angle LAM$

Тогда $LK = LM$; $AK = AM$

2. $\triangle AKN = \triangle AMN$ (по ~~тре~~ двум сторонам и углу между ними)

   1. $AK = AM$ 2. AN - общая 3. $\angle KAN = \angle MAN$

Тогда $S(AKN) = S(AMN)$

3. $S(AKN) = \frac{1}{2} AK \cdot AN \cdot \sin KAN$ Пусть $\angle KAN = \alpha$

$S(AKN) = \frac{1}{2} \cdot AL \cdot \cos\alpha \cdot AN \cdot \sin\alpha = \frac{1}{4} \cdot AL \cdot AN \cdot \sin 2\alpha$

⊕

4. $S(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin 2\angle = \cancel{2 AC \cdot AB \cos\angle}$

5. $\triangle ANC \sim \triangle ABL$ (по двум углам)

1. $\angle NAC = \angle BAL$

2. $\angle ANC = \angle ABL$, как опирающиеся на равные дуги.

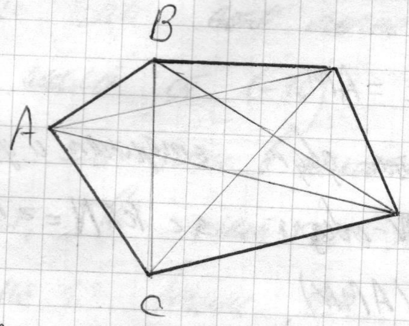
Тогда $\frac{AN}{AB} = \frac{AC}{AL}$; $AN \cdot AL = AB \cdot AC$!

6. Значит, $S(AKN) = \frac{1}{4} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 2\angle =$
$= \frac{1}{2} S(ABC)$

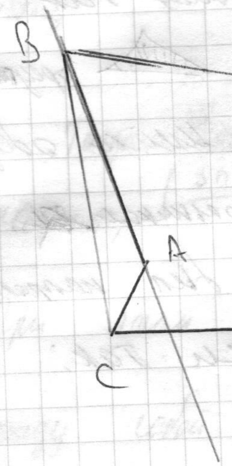
$S(AKNM) = 2S(AKN) = S(ABC)$, ч. т. д.

№4.

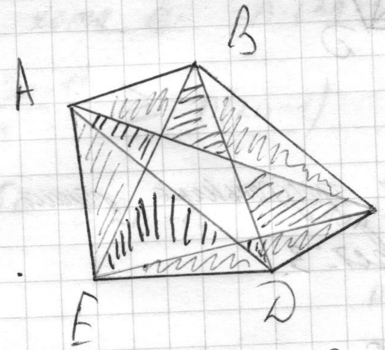
Проведем все диагонали в пятиугольнике.



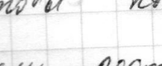
В любом случае получается „звезда", т.к. если бы A лежала за BC, то пятиугольник был бы не выпуклый.



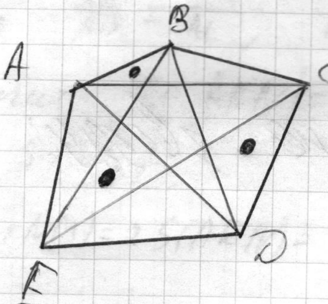
Тогда посмотрим на звезду.



Т.к. точка должна быть в △ ABC, в △ ACD, в △ ADE, а они не пересекаются, то таких точек не меньше, чем 3.

Тогда чтобы доставить 3 точки проведем все диагонали, поставим точки в один из треугольников , которые заштрихованы на рисунке.

Две оставшихся точки поставим так, чтобы они лежали в заштрихованных треугольниках. При этом, эти треугольники не имели общей стороны с тем треугольником, и ни один из не был напротив, т.е. ставим 3 точки так:



Тогда в любом треугольнике лежит ровно 1 вершина. Ответ: 3.

№5.

Всего команд $3n$.

Тогда игр $\frac{3n\cdot(3n-1)}{2}$

Т.к. ничьей не было, то кол-во побед равно кол-ву игр.

Пусть команды ВЛ сделали a побед, а команды 1ой лиги b побед.

Тогда $\frac{a}{b} = \frac{7}{5}$, $a = 7k$, $k \in N$
$b = 5k$, $k \in N$

Тогда всего побед $12k$.

Значит, $\left(\frac{3n\cdot(3n-1)}{2\cdot 12}\right) \in N$

При этом у команд 1ой лиги $\frac{15n(3n-1)}{24}$ побед.

Между собой команды 1ой лиги сыграли

$\frac{2n\cdot(2n-1)}{2}$ игр, значит, в сумме они

одержали хотя бы $n\cdot(2n-1)$ побед, т.е.

$$\frac{15n(3n-1)}{24} \geq n(2n-1)$$

$$\frac{15n^2-5n}{8} \geq 2n^2-n \qquad 15n^2-5n \geq 16n^2-8n$$

$$n^2-3n \leq 0$$

$$0 \leq n \leq 3$$

При этом $\left(\frac{3n\cdot(3n-1)}{24}\right) \in N$.

Тогда для n возможно единственное значение (3).

$$\frac{3\cdot 3\cdot(9-1)}{2\cdot 12} = 3$$

21 победа - команды ВЛ

15 побед - команды 1ой лиги

Ответ: $n = 3$.