Муниципальный этап по математике

ученика 10 класса

МК-208

ТЕТРАДЬ

для ______________________

____

учени________ класса________

________ школы________

____

____

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	7	7	35

Чистовик

№1.

Ответ: можно.

Например, мы 166 раз разрежем 1 из имеющихся листов на 6 листов и 108 раз разрежем на 12 листов.

За 1 такую операцию мы теряем 1 лист, который режем, и получаем 6 или 12 листов, на которые режем, в итоге количество листов бумаги увеличивается на 5 или 11 листов за 1 операцию. Тогда после ~~на~~ приведённой в начале стратегии разрезания в конце мы получим

$1 + 5 \cdot 166 + 11 \cdot 108 = 1 + 830 + 1188 = 2019$

листов.

№2.

Ответ: да, верно.

В любой момент времени мы имеем многочлен вида $x^2 + bx + c$.

В начале $b = c - 10$.

в ~~с~~ конце $b = c + 10$

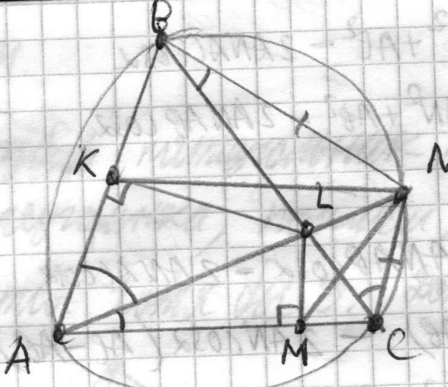
Так как за 1 операцию мы увеличиваем или уменьшаем b или c на 1, то из равенства $b = c + m$ можно перейти только к равенству $b = c + m + 1$ или $b = c + m - 1$.

Так как в начале $b = c - 10$, а в конце $b = c + 10$, то был момент, когда $b = c + 1$. ~~Когда~~ ~~коэф~~ Тогда в этот момент был многочлен вида $x^2 + (c+1)x + c = (x+1)(x+c)$. Так как изначально коэффициенты - целые числа и ~~к~~ изменяются только на ± 1, то в любой момент $-c$ - целое число. Тогда корни

$\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -c \end{array}\right.$ - ~~цел~~ являются целыми числами.

Значит, в этот момент на доске был написан квадратный трёхчлен ~~многочлен~~ с целыми корнями, ч.т.д.

№3.



Дано:
$\triangle ABC$ – остроугольный
~~LM~~ AL – биссектриса $\angle BAC$
$L \in BC$
ω – описанная окружность около $\triangle ABC$.
$\omega \cap AL = N$
$LM \perp AC, M \in AC$
$LK \perp AB, K \in AB$.

Доказать: $S(ABC) = S(AKNM)$.

Доказательство:

1) Пусть $\angle BAL = \alpha$. Тогда $\angle LAC = \alpha$, т.к. AL – биссектриса $\angle BAC$.

2) $BN = CN$, так как в окружности ~~ω~~ ~~это хорд~~ ω $\angle CBN = \angle NAC$ и $\angle BAN = \angle BCN$ как вписанные углы, а значит, $\triangle BCN$ – равнобедренный, т.к. тогда $\angle B\cancel{AC}CN = \angle CBN = \alpha$.

3) $S(ABC) = S(ABL) + S(ALC) = \frac{AB \cdot AL \sin\alpha}{2} + \frac{AC \cdot AL \sin\alpha}{2} = \frac{AB + AC}{2} \cdot AL \sin\alpha$

4) $S(AKNM) = S(AKN) + S(AMN) = \frac{AK \cdot AN \cdot \sin\alpha}{2} + \frac{AM \cdot AN \cdot \sin\alpha}{2} = AN \cdot \sin\alpha \cdot \left(\frac{AK + AM}{2}\right) = AN \cdot \sin\alpha \cdot \left(\frac{AL\cos\alpha + AL\cos\alpha}{2}\right) = AL \sin\alpha \left(\frac{2AN\cos\alpha}{2}\right)$

$AK = AL\cos\alpha$ в $\triangle AKL$
$AM = AL\cos\alpha$ в $\triangle ALM$

$$\frac{S(ABC)}{S(AKNM)} = \frac{(AB+AC)\,AL\sin\alpha}{AL\sin\alpha \cdot 2AN\cos\alpha} = \frac{AB+AC}{2AN\cos\alpha}$$

5) $\triangle NAC$. $CN^2 = AN^2 + AC^2 - 2AN\,AC\cos\alpha$

$\triangle ABN$ $BN^2 = AN^2 + AB^2 - 2AN\,AB\cos\alpha$

т.к. $BN = CN$, то

$0 = AC^2 - AB^2 + 2AN\,AB\cos\alpha - 2AN\,AC\cos\alpha$

$0 = (AC - AB)(AC + AB) - 2AN\cos\alpha(AC - AB)$

$(AC - AB)(AC + AB - 2AN\cos\alpha) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} AC = AB \\ AC + AB = 2AN\cos\alpha \end{array}\right.$$

если $AC + AB = 2AN\cos\alpha$, то $\dfrac{S(ABC)}{S(AKNM)} = \dfrac{AB + AC}{2AN\cos\alpha} =$

$= 1$, значит $S(ABC) = S(AKNM)$, ч.т.д.

если $AC = AB$, то $\triangle BAN = \triangle CAN$ по 2 сторонам и углу между ними (AN - общая, $AB = AC$, $\angle BAN = \angle CAN = \alpha$)

Тогда $\angle ABN = \angle ACN$. Так как $ABNC$ - вписанный, то $\angle ABN + \angle ACN = 180^\circ$. Тогда $\angle ABN = \angle ACN = 90^\circ$.

Тогда в $\triangle ABN$ $AB = AN\cos\alpha$,

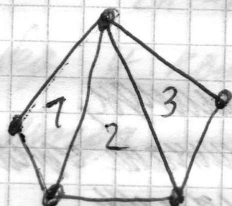
в $\triangle ACN$ $AC = AN\cos\alpha$.

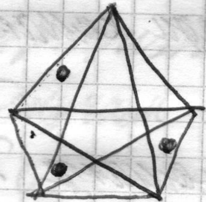
$AB + AC = 2AN\cos\alpha$, и значит $\dfrac{S(ABC)}{S(AKNM)} = 1$,

тогда $S(ABC) = S(AKNM)$, ч.т.д.

№4.

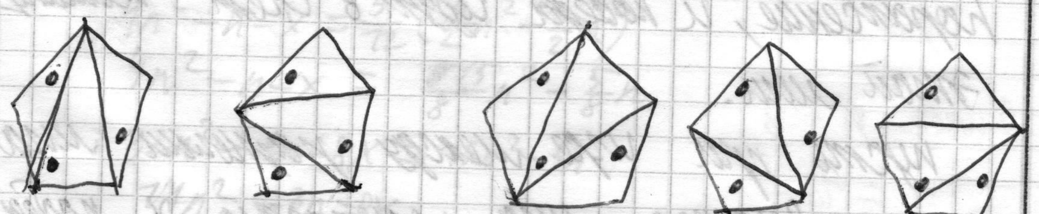
Разбив пятиугольник на 3 непересекающихся треугольника, поймём, что точек потребуется хотя бы 3. Докажем, что 3 точек достаточно.



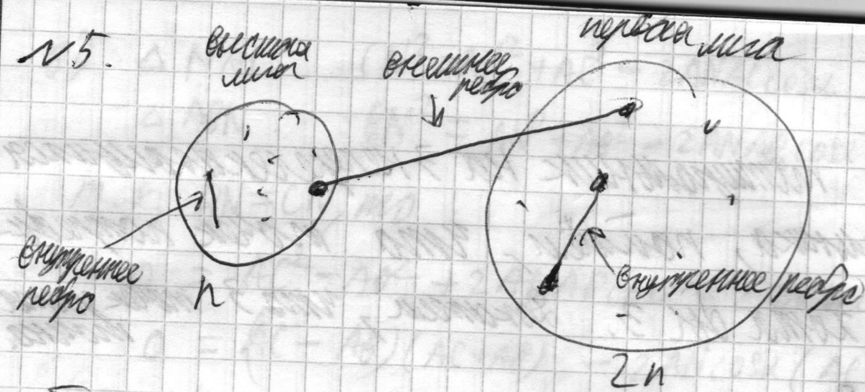


Отметим эти 3 точки, как показано на пятиугольнике (разобьём пятиугольник всеми возможными диагоналями на части) и ~~в по периметру~~ в ~~этих частях отметим точку~~ в ~~каждой треуг части~~)

Тогда в каждом треугольнике будет хотя бы 1 точка при любом разбиении диагоналями на треугольники



№5.



Пусть вершины графа — это команды, ~~а~~ ребро между двумя вершинами означает игру между этими 2 командами.

Тогда „внутренних" ребер среди команд высшей лиги — $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$

„внутренних" ребер среди команд первой лиги — $\frac{2n(2n-1)}{2} = 2n^2-n$

„внешних" ребер между командами высшей лиги и первой лиги — $n\cdot 2n = 2n^2$

при игре внутри одной и той же лиги и поражение, и победа идут в счёт команд этой лиги.

Пусть при игре между разными лигами высшая лига одержала x побед.

Тогда первая лига одержала $2n^2-x$ при игре между лигами.

Тогда $\frac{n(n-1)}{2}+x$ — общее количество побед у команд из высшей лиги

$2n^2-n+2n^2-x$ — общее количество побед у команд из первой лиги.

Тогда $\frac{n(n-1)}{2}+x=7k$

$2n^2-n+2n^2-x=5k$, где k — коэффициент пропорциональности.

Получаем систему

$$\begin{cases} 0\le x\le 2n^2 \\ x\in N\cup\{0\} \\ n\in N \\ \frac{n(n-1)}{2}+x=7k \\ 4n^2-n-x=5k \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} 0\le x\le 2n^2 \\ x\in N\cup\{0\} \\ n\in N \\ (1)\begin{cases} 4{,}5n^2-1{,}5n=12k \\ 4n^2-n-x=5k \end{cases} \end{cases}$$

(1) $\begin{cases} 4{,}5n^2-1{,}5n=12k \\ 4n^2-n-x=5k \end{cases}$

$4n^2-n-x=\frac{5}{12}\left(\frac{9}{2}n^2-\frac{3}{2}n\right)$

$4n^2-n-x=\frac{15}{8}n^2-\frac{5}{8}n$

$32n^2-8n-8x=15n^2-5n$

$17n^2-3n=8x$

$x\in N\cup\{0\}\Longleftrightarrow(17n^2-3n)\,\vdots\,8$

$$(2)\ \begin{cases} 0 \le 17n^2 - 3n \le 8\cdot 2n^2 \\ (17n^2 - 3n) \vdots 8 \\ n \in N \end{cases}$$

$$\begin{cases} 17n^2 \ge 3n \\ n^2 - 3n \le 0 \\ (17n^2 - 3n) \vdots 8 \\ n \in N \end{cases}$$

$$\begin{cases} 17n \ge 3 \text{ — верно при } \forall n \in N \\ n^2 \le 3n \\ (17n^2 - 3n) \vdots 8 \\ n \in N \end{cases}$$

$$\begin{cases} n \le 3 \\ 17n^2 - 3n \vdots 8 \\ n \in N \end{cases}$$

$$\begin{cases} n \in \{1; 2; 3\} \\ (17n^2 - 3n) \vdots 8 \end{cases}$$

при $n=1$ $\quad 17n^2 - 3n = 14 \not\vdots\ 8$

при $n=2$ $\quad 17n^2 - 3n = 68 - 6 = 62 \not\vdots\ 8$

при $n=3$ $\quad 17n^2 - 3n = 17\cdot 9 - 9 = (16\cdot 9) \vdots 8$

В итоге $n = 3$

$x = 18$

$k = 3$

Ответ: $n=3$