Муниципальный этап

по математике МШ-235

ученика 10 класса

ТЕТРАДЬ

для________________________________

____

учени______________класса________

___________________школы________

____

____

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	7	7	35

Чистовик

№1

Заметим, что когда мы делим лист на 6 частей мы увеличиваем кол-во листов на 5 т.к. мы получаем 6 новых листов но при этом один старый исчезает и того $+6-1=5$ Аналогично, когда мы делим на 12 частей, мы увеличиваем кол-во листов на 11 ($12-1=11$). Пусть мы k раз поделили на 6 частей, тогда кол-во листов за эти операции увеличилось на $5k$. Аналогично, если мы n раз поделили на 12 частей, то кол-во листов увеличилось на $11n$

Тогда т.к. в начале у нас 1 лист, а в конце 2019, то

$1 + 5k + 11n = 2019$, где

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \\ n = 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} k \in \mathbb{N} \\ k = 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$1 + 5k + 11n = 2019$$

легко заметить, что при $\begin{cases} k = 1 \\ n = 183 \end{cases}$ выражение верно

$$1 + \overset{5}{5 \cdot 1} + \overset{2013}{11 \cdot 183} = 2019$$

$$2019 = 2019$$

Значит, если мы один раз разрежем лист на 6 частей, а 183 раза – на 12 частей, то у нас будет равно 2019 листов. Значит, такое возможно.

Ответ: да, возможно

№2

Посмотрим на разность коэффициента при x и свободного члена. В начальном трёхчлене она была равна $10-20=-10$, а в конечном $20-10=10$. Заметим, что каждым ходом мы изменяем либо коэф. при x либо свободный член на 1. Таким образом их разность каждый ход изменяется ровно на 1. Так как изначально разность была равна -10, а в конце стала равна 10, а каждым ходом она менялась ровно на 1, то это значит, что она принимала все целые значения от -10, до 10 включительно

+

хотя бы 1 раз.

Значит, в какой-то момент времени разность была равна +1

Тогда пусть в это время свободный член был равен a

a — целое т.к. изначально у нас свободный член был -10, $-10 \in \mathbb{Z}$ и каждым ходом мы меняли его на 1, $1 \in \mathbb{Z}$, а $\mathbb{Z} \pm \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

Тогда коэфф. при x был равен $a+1$ т.к. $(a+1) - a = +1$

Значит, у нас был трёхчлен

$$x^2 + (a+1)x + a = 0$$

~~По т. Виета~~

$$D = (a+1)^2 - 4a =$$
$$= a^2 + 1 + 2a - 4a = (a-1)^2 \geq 0$$

Тогда по т. Виета

$x_1 + x_2 = -a - 1$

$x_1 x_2 = a$

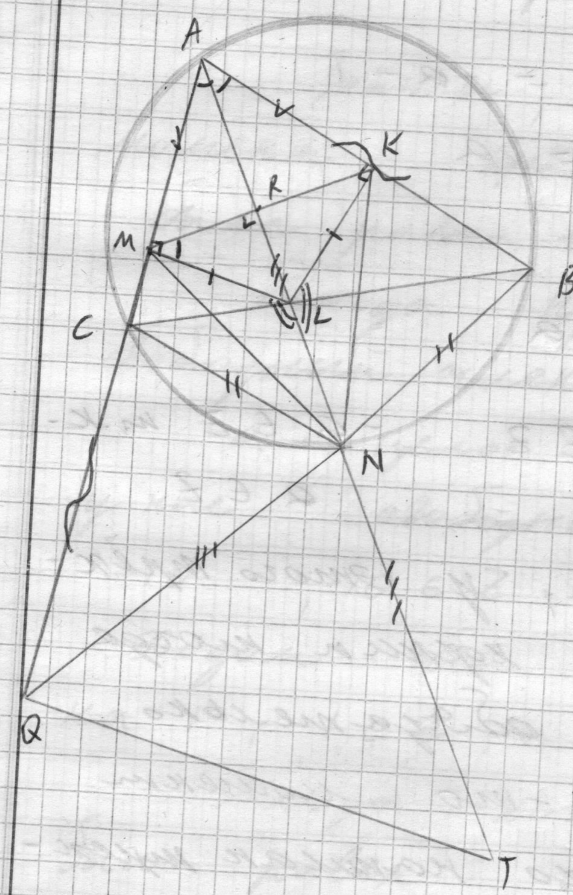
$$\left[\begin{aligned} x_1 &= -1 \\ x_2 &= -a \end{aligned}\right.$$

$-1 \in Z$ $\quad -a \in Z$ т.к. $a \in Z$

Значит, у этого трёхчлена целые корни тогда на доске обязательно был в какой-то момент времени ~~какого~~ написан трехчлен с целыми корнями.

Ответ: да, верно.

№ 3



Дано:

$\triangle ABC$

окр $(O; R)$ – описаная $\triangle ABC$

AN – биссектриса $\triangle ABC$

$AN \cap$ окр $(O; R) = N$

$AN \cap BC = L$

$LK \perp AB$

$LM \perp AC$

Доказать:

$S_{ABC} = S_{AMNK}$

$LK = LM$ по свойству биссектрисы т.к. AN – биссек.

$L \in AN$

$\angle CAN = \angle NAB$ т.к. AN – биссектриса

CN = NB - как хорды стягивающие равные дуги ($\angle CAN = \angle NAB$)

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle LAB} + S_{\triangle LAC} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot LK \cdot AB + \frac{1}{2} \cdot LM \cdot AC =$$

$$= LK \cdot \frac{AB + AC}{2}$$

$$MK \cap AL = R$$

AM = AK по свойству биссектрисы

Тогда $\triangle MAK$ - равнобедренный AR - биссектриса

Значит, AR - высота $\triangle MAK$

$$AR \perp MK$$

$\triangle LMA = \triangle LKA$ по катету и гипотенузе

LM = LK

AL - общая

Значит, $\angle ALM = \angle ALK$

$\angle MLN = 180° - \angle ALM = 180° - \angle ALK =$

$\angle KLN$ $\quad \triangle MAN = \triangle KAN$ по

2 сторонам и углу

между ними

$MA = KA$

AN – общая

$\angle MAN = \angle KAN$

Значит, $MN = KN$

$$S_{AMNK} = S_{\triangle MAN} + S_{\triangle KAN} =$$

$$= 2\ S_{\triangle MAN} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AN \cdot MR$$

$$= AN \cdot MR$$

$\triangle MRL$ $\quad \angle MRL = 90^\circ$

Пусть $\angle MAL = \alpha$, тогда

$\angle ALM = 90^\circ - \alpha$, а угол

$\angle RML = \alpha$ т.к. $\angle RMC$ – остр

то $\cos\alpha > 0$

Тогда из $\triangle MRL$

$$MR = ML \cdot \cos\alpha =$$

$$= KL \cdot \cos\alpha$$

Д. п. $T \in AN$

N - середина AT

$AN = NT$

Д. п. $Q \in AC$

$A - C - Q$ $\quad QC = AB$

$\angle ABN + \angle ACN = 180^\circ$ т. к.

$\square ABNC$ - вписанный

$\angle QCN \overset{?}{+} \angle ACN = 180^\circ$

Значит, $\angle QCN = \angle ABN$

$\triangle QCN = \triangle ABN$ по 2 сторонам и углу между ними

$CQ = AB$

$CN = BN$

$\angle QCN = \angle ABN$

Значит $QN = AN$

Тогда в $\triangle AQT$

QN - медиана $\quad QN = \frac{1}{2} AT$

Значит $\angle AQT = 90^\circ$ - по признаку прямоугольного треугольника

Тогда $AQ = AT \cos\alpha$

$$\frac{AB+AC}{2} = AN \cdot \cos\alpha$$

Тогда $S_{ABC} = LK \cdot \frac{AB+AC}{2} =$

$= LK \cdot AN \cdot \cos\alpha = \frac{MK}{\cos\alpha} \cdot AN$

$\times \cos\alpha = MK \cdot AN = S_{AKNM}$

ч.т.д.

№ 5

$n \cdot 2n = 2n^2$ – кол-во матчей между командами высшей и первой лиги

$\frac{n(n-1)}{2}$ – кол-во матчей между командами высшей лиги

$\frac{2n(2n-1)}{2}$ – кол-во матчей

между командами 1 лиги

Заметим, что когда команда играет с командой из своей лиги то они приносят ровно 1 победу в число всех побед команд этой лиги

Пусть команды 1ой лиги выиграли у команд высшей лиги k игр $\left[\begin{array}{l} k \in \mathbb{N} \\ k=0 \end{array}\right.$

Тогда $2n^2-k$ — кол.-во побед высшей лиги над 1ой

Тогда

$$\frac{2n^2-k+\dfrac{n(n-1)}{2}}{k+\dfrac{2n(2n-1)}{2}}=\frac{7}{5}$$

всего побед команд высшей лиги

всего побед команд 1ой лиги

$$\frac{5n^2 - n - 2k}{4n^2 - 2n + 2k} = \frac{7}{5}$$

$$25n^2 - 5n - 10k = 28n^2 - 14n + 14k,$$
$$4n^2 - 2n + 2k \neq 0$$

$$3n^2 - 9n + 24k = 0$$

$$D = 81 - 4 \cdot 3 \cdot 24 \cdot k = 81 - 28$$

Т.к. $D \geq 0$ (если есть корни), то $k = 0$

Тогда $3n^2 - 9n = 0$

$n(3n - 9) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} n = 0 \\ n = 3 \end{array}\right.$$

Т.к. мы считаем, что организовывать матч для 0 команд никто бы не стал, то $n = 3$

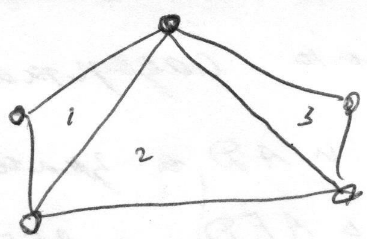
Ответ: $n = 3$

№ 4

Оценка

Докажем, что точек надо 3 или более.

Возьмём произвольную вершину 5-угольника. ~~Т.к. он~~ и проведём из неё все диагонали. Т.к. наш 5угольник выпуклый, то он разобьётся на 3 треугольника (не пересекающихся) вершины каждого из которых являются вершинами пятиугольника

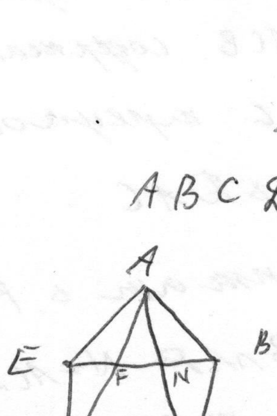


Тогда в каждом должно быть хотя бы по 1 точке

Значит, точек не менее 3

Докажем, что 3 хватит

Пусть у нас пятиугольник ABCDE



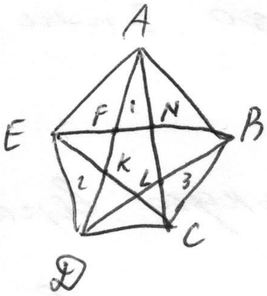
Возьмём вершину A и проведём из неё все диагонали

Проведём EB

$EB \cap AD = F$
$EB \cap AC = N$

Тогда пусть точка 1 лежит в $\triangle FAN$

Теперь проведём EC и BD ШШ-235



$EC \cap AD = K$

$AC \cap BD = L$

Тогда пусть точка 2 лежит в $\triangle EKD$, а точка 3 лежит в $\triangle CLB$

Докажем, что теперь в любом треуг. есть хотябы 1 точка

Если мы взяли такой треугольник что в нём есть сторона ED то он обязан содержать $\triangle EKD$ т.к. $K = EC$ и AD, а значит он содержит точку 2

Тогда $\triangle AED$, $\triangle BED$, $\triangle CED$ содержат точку 2

Аналогично, если мы взяли треуг. что в нём есть BC, то в нём есть $\triangle BLC$ а значит есть точка 3. Тогда $\triangle DCB$, $\triangle ECB$, $\triangle ACB$ содержат точку 3. Теперь у нас остались треугольники $\triangle AEC$, $\triangle ABD$, $\triangle EAB$, $\triangle DAC$.

Заметим, что все они содержат $\triangle FAN$ т.к. они содержат $\angle FAN$, а $F = EB \cap AD$ $N = AC \cap EB$

Значит, все они содержат точку 1

Всего у нас $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10$ различных треугольников и для каждого мы нашли 1 точку

Значит, 3 точек хватит.