Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников.

ученика МГ-252

№1

Существуют:

1\. x^2-3x+1 $D=8$ два разл. корня

2\. $2x^2-6x+2$ $D>0$ два разл. корня

3\. $3x^2-9x+3$ $D>0$ два разл. корня

суммы: 1) $3x^2-9x+3$ (1+2)

2) $4x^2-12x+4$ (1+3)

3) $5x^2-15x+5$ (2+3)

~~Это~~ Очевидно, что корни у всех трехчленов ~~[illegible]~~ и их сумм одинаковы.

1	2	3	4	5
7	7	0	7	7

28

№2

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z} \qquad \begin{matrix} x\neq 0 \\ y\neq 0 \\ z\neq 0 \end{matrix}$$

$$\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{z} \quad \| \cdot xyz$$

$$xz+yz=xy$$

Рассмотрим: $(x+y-z)^2$ — квадрат какого-то целого числа

$(x+y-z)^2=x^2+y^2+z^2-2yz-2xz+2xy=$
$=x^2+y^2+z^2-2xy+2xy=x^2+y^2+z^2$

т. е. $x^2+y^2+z^2$ — кв. целого числа

ЧТД

№ 4

$0 < x < \frac{\pi}{6}$, тогда $\sin x < \frac{1}{2}$

$\sin^n x < \frac{1}{2^n}$

Тогда:

$\sin x + \sin^3 x + \ldots + \sin^{2019} x < \sin x + \sin^3 x + \ldots$

бесконечная

т.к. $\sin^n x > 0$

~~Тогда~~. Также:

$$\sin x + \underbrace{\sin^3 x}_{} + \underbrace{\sin^5 x}_{} + \ldots < \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \ldots}_{} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{ccc} \wedge & \wedge & \wedge \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{32} \end{array}$$

сумма бесм. уб. геом. прогрессии равна $S = \frac{b_1}{1-q}$

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

Итого:

$\sin x + \sin^3 x + \ldots + \sin^{2019} x < \frac{2}{3}$

ЧТД

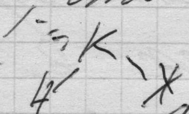
~~Итак.~~

~~Допустим~~

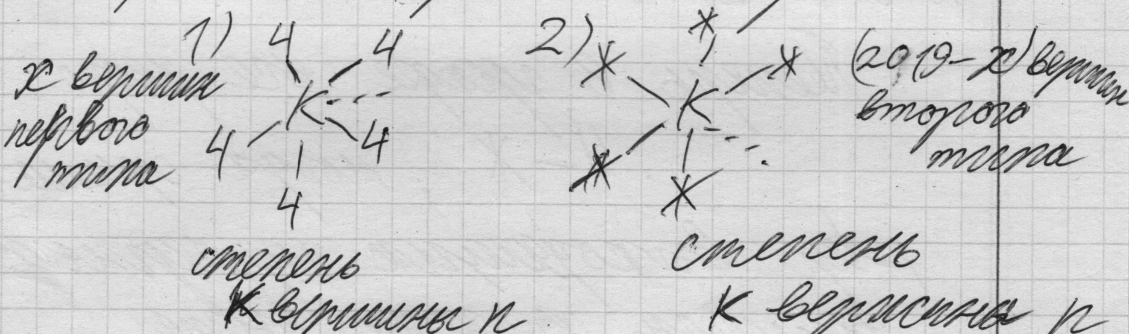
№5

Рассмотрим граф:

Допустим что такой вершины



не найдется, тогда существует два варианта красной вершины:



Так как в графе степени вершин равны по усл., то тогда пусть эта степень равна n, и заменим ~~каждую красную~~ x красных вершин на $n \cdot x$ черных вершин со степенью $(n-1)$, и $(2019-x)$ красных вершин на $n \cdot (2019-x)$ вершин со степенью $(n-1)$.

Теперь мы имеем

граф с: 2019 желтых ст. n

2019 черных ст. n

2019 желтых вершин со степенью n

2019 черных в. с степенью n

$n \cdot x$ черных в. ст. $(n-1)$

$n \cdot (2019-x)$ желтых в. ст. $(n-1)$

Теперь в графе все ребра

Ч–Ж, тогда сумма

ребер выходящих из черных

вершин должна быть

равна сумме ребер выходящих

из желтых вершин:

$$2019 \cdot n + n(n-1)(2019-x) = n \cdot 2019 + n \cdot x(n-1)$$

$$n(n-1)(2019-x) = n(n-1)x$$

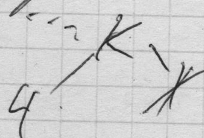
$$2019 = 2x$$

x – число нецелое

что невозможно

т.к. это число вершин x первого типа

Значит наше предположение неверно и вершина



найдется.

ЧТД